Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
14. Juli 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 12

Abgabe: Freitag, 21. Juli 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Aufgabe 45

Sei A ein kommutativer Ring, sei M ein zyklischer A-Modul und $\varphi\colon M \to M$ eine A-lineare Abbildung. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $\varphi(x) = ax$ für alle $x \in M$.

Aufgabe 46

Sei A ein Hauptidealring, sei $p \in A$ irreduzibel. Für jeden A-Modul M sei $M(p) = \{x \in M : \exists\, n \in \mathbb{N}\ p^n x = 0\}$. Zeige:

(a) $M(p)$ ist ein Untermodul von M, und $(M \oplus M')(p) = M(p) \oplus M'(p)$ für je zwei A-Moduln M, M'.

(b) Für $0 \neq a \in A$ und $M = A/\langle a \rangle$ ist $M(p) \cong A/\langle p^e \rangle$ mit $e = v_p(a)$.

Hinweis: Betrachte in (b) zunächst den Fall $e = 0$.

Aufgabe 47

Sei $(G, +) = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe mit $|G| = n < \infty$. Zeige:

(a) Zu jedem Teiler $d \geq 1$ von n gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung d von G, nämlich $U_d := \left\langle \frac{n}{d} g \right\rangle$.

(b) Für Teiler d, e von n gilt: $U_d \subseteq U_e \;\Leftrightarrow\; d \mid e$.

(c) Für $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}$ ist

$$\big|\langle k_1 g, \ldots, k_r g \rangle\big| \;=\; \frac{n}{\mathrm{ggT}(k_1, \ldots, k_r, n)}.$$

Aufgabe 48

Zeige:

(a) Jede endlich erzeugte Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{Q}$ ist zyklisch.

(b) Jede endlich erzeugte Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist endlich und zyklisch.

Aufgabe N

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$, sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Der $K[t]$-Modul V_f sei isomorph zu

$$\bigoplus_{i=1}^{r} K[t]/\langle p_i \rangle$$

mit Polynomen $p_1, \ldots, p_r \in K[t]$. Zeige für $\lambda \in K$: Die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ist gleich der Anzahl der Indices $i \in \{1, \ldots, r\}$ mit $p_i(\lambda) = 0$. (*Hinweis*: Reduziere zunächst auf den Fall $r = 1$.)