Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
5. Mai 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 2

Abgabe: Freitag, 12. Mai 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 5

Sei $\mathrm{Sym}_n(K)$ bzw. $\mathrm{Skew}_n(K)$ die Menge der symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen. Zeige, daß beides Untervektorräume von $\mathrm{M}_n(K)$ sind, bestimme ihre Dimensionen und zeige für $\mathrm{char}(K) \neq 2$: $\mathrm{M}_n(K) = \mathrm{Sym}_n(K) \oplus \mathrm{Skew}_n(K)$.

Aufgabe 6

Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$ und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Hat f einen Eigenvektor, so gibt es einen f-invarianten Unterraum U von V (Vorlesung V.4.2) mit $\mathrm{codim}_V(U) = 1$.

Aufgabe 7

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, daß die Abbildung $\tau\colon \mathrm{M}_n(K) \times \mathrm{M}_n(K) \to K$, $\tau(A, B) := \mathrm{tr}(AB)$, eine symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{M}_n(K)$ ist und entscheide (mit Begründung), ob sie ausgeartet ist.

Aufgabe 8

Zeige, daß die Abbildung $\beta\colon \mathrm{M}_2(K) \times \mathrm{M}_2(K) \to K$,

$$\beta(A, B) \;:=\; \det(A + B) - \det(A) - \det(B)$$

(A, $B \in \mathrm{M}_2(K)$) eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform ist, und finde für $\mathrm{char}(K) \neq 2$ eine Orthogonalbasis von $\mathrm{M}_2(K)$ bezüglich β.

Aufgabe B

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei $0 \to V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{r-1}} V_r \to 0$ eine exakte Sequenz aus Vektorräumen V_i und linearen Abbildungen f_i (mit $r \geq 0$).

(a) Sei $r = 2$. Konstruiere einen Isomorphismus $V_1 \to V_0 \oplus V_2$.

(b) Sei $\dim(V_i) < \infty$ für $i = 0, \ldots, r$. Zeige

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \dim(V_i) \;=\; 0.$$

Hinweis zu (a): Aufgabe 2.