Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
12. Mai 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 3

Abgabe: Freitag, 19. Mai 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Aufgabe 9

Finde für die folgende Matrix $A \in \mathrm{Sym}_4(\mathbb{Q})$ eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{Q})$ mit $S^t AS = D$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

Sei $n \geq 2$. Finde für die durch die $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \big(1 - \delta_{ij}\big)_{1 \leq i,j \leq n}$$

gegebene symmetrische Bilinearform b_A auf $V = \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Zerlegung $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ wie in Theorem 3.25, und bestimme die Signatur von A.

Aufgabe 11

Sei V ein unitärer Vektorraum, sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Für alle $x \in V$ gelte $\langle x, f(x)\rangle = 0$. Zeige $f = 0$. (*Hinweis*: Berechne $\langle x, f(x)\rangle$ für $x = v + w$ und für $x = v + iw$.) Gilt die analoge Aussage auch für euklidische Vektorräume?

Aufgabe 12

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$, und sei $h\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine hermitesche Form. Zeige: Es gibt eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V mit $h(v_j, v_k) = 0$ für $j \neq k$. Folgere: Zu jeder positiv semidefiniten hermiteschen Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ gibt es eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A = B^*B$. (*Hinweis*: Imitiere den Beweis von Theorem 3.17.)

Aufgabe C

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Seien $m, n \geq 1$, seien $A \in \mathrm{Sym}_m(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ und $C \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sowie

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ C^t & B \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_{m+n}(\mathbb{R}).$$

Dabei sei $\det(A) \neq 0$, und es sei

$$S := B - C^t \cdot A^{-1} \cdot C.$$

Zeige: Genau dann ist M positiv (semi-) definit, wenn A und S beide positiv (semi-) definit sind. (*Hinweis*: Betrachte T^tMT für eine geschickt gewählte Matrix T.)