Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
19. Mai 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 4

Abgabe: Freitag, 26. Mai 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Aufgabe 13

Sei K ein Körper, seien $U, V \in \mathrm{GL}_n(K)$ (invertierbare) obere Dreiecksmatrizen. Zeige: Ist U^tV oder UV^t eine Diagonalmatrix, so sind U und V Diagonalmatrizen.

Aufgabe 14

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sei V ein euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Für die $n \times n$-Matrix

$$A := \big(\langle v_j, v_k\rangle\big)_{j,k=1,\dots,n}$$

gilt dann $A = A^*$ und $A \succeq 0$. Genau dann ist A positiv definit, wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 15

Für $d \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{R}[x]_d$ der Vektorraum aller Polynome in $\mathbb{R}[x]$ vom Grad $\le d$. Durch

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(t)q(t)\,dt \quad (p,\ q \in \mathbb{R}[x]_d)$$

ist auf $\mathbb{R}[x]_d$ ein Skalarprodukt definiert (was nicht gezeigt werden muß). Welche Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[x]_2$ entsteht aus der Basis $(1,\ x,\ x^2)$ durch Gram-Schmidt Orthonormalisierung?

Aufgabe 16

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Für nichtleere Teilmengen $M,\ N \subseteq V$ sei $d(M,N) := \inf\{\|x-y\| \colon x \in M,\ y \in N\}$, der Abstand von M und N.

(a) Sei $0 \ne w \in V$ und $L := \mathbb{K}w$. Zeige

$$d(v,L)^2 = \frac{1}{\|w\|^2}\Big(\|v\|^2\,\|w\|^2 - |\langle v,w\rangle|^2\Big)$$

für $v \in V$ (mit $d(v,L) := d(\{v\},L)$).

(b) Für $i = 1,2$ sei $w_i \in V$ und $U_i \subseteq V$ ein Untervektorraum. Für den Abstand der affinen Unterräume $w_i + U_i$ von V gilt

$$d(w_1+U_1,\ w_2+U_2) = d(w_1-w_2,\ U_1+U_2).$$

(c) Berechne im $\mathbb{R}^3$ den Abstand der beiden Geraden $L_i = w_i + \mathbb{R}u_i$ $(i=1,2)$ mit $w_1 = (1,2,0)^t$, $w_2 = (2a,1,a)^t$, $u_1 = (1,1,a)^t$, $u_2 = (0,0,1)^t$ und einem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

b.w.

Aufgabe D*

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei V ein euklidischer Vektorraum, und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim(U) = m < \infty$. Sei $(u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis von U, sei $A := \big(\langle u_j, u_k \rangle\big)_{j,k=1,\ldots,m}$. Sei $v \in V$, und sei $x_j := \langle v, u_j \rangle$ $(j = 1, \ldots, m)$ sowie $x = (x_1, \ldots, x_m)^t$. Dann ist

$$d(v, U)^2 \;=\; ||v||^2 - x^t\, A^{-1}\, x.$$

Anleitung: Berechne den Abstand zwischen v und einer beliebigen Linearkombination der u_j, und mache eine quadratische Ergänzung.