Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
26. Mai 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 5

Abgabe: Freitag, 2. Juni 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Aufgabe 17

(a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum (mit $\dim(V) < \infty$), sei $0 \neq w \in V$, und sei $U = (\mathbb{K}w)^\perp$. Für die orthogonale Spiegelung σ_U an U zeige man:

$$\sigma_U(v) \;=\; v - 2\,\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\,w$$

für alle $v \in V$.

(b) Für $i = 1, 2$ sei $\sigma_i \in \mathrm{O}(3)$ die orthogonale Spiegelung an der Ebene $U_i := (\mathbb{R}w_i)^\perp$, mit $w_1 := (1, 0, 1)^t$ und $w_2 := (0, 0, 1)^t$. Bestimme Drehachse und Drehwinkel der Drehung $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Aufgabe 18

(a) Jede Drehung in der Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung ist eine Komposition von zwei orthogonalen Spiegelungen (an Geraden durch den Ursprung).

(b) Stimmt die Aussage auch für Drehungen im Raum $\mathbb{R}^3$ (und Spiegelungen an Ebenen)?

Aufgabe 19

Für u, v, w, $z \in \mathbb{R}^3$ gilt:

(a) $u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle \cdot v - \langle u, v\rangle \cdot w$;

(b) $\langle u, v \times w\rangle = \langle v, w \times u\rangle = \langle w, u \times v\rangle$;

(c) $\langle u \times v, w \times z\rangle = \langle u, w\rangle \cdot \langle v, z\rangle - \langle u, z\rangle \cdot \langle v, w\rangle$.

(d) $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$.

Aufgabe 20

Sei $\mathbb{H}$ der Schiefkörper der Hamiltonschen Quaternionen. Wir verwenden die Bezeichnungen aus der Vorlesung. Für $A \in \mathbb{H}$ sei $T(A) := \frac{1}{2}(A + A^*)$ (mit $A^* = \overline{A}^t$). Zeige für alle A, $B \in \mathbb{H}$:

(a) $\langle A, B\rangle\, E_0 = T(AB^*) = T(BA^*)$.

(b) $BAB = 2\langle A^*, B\rangle\, B - \langle B, B\rangle\, A^*$.

Hinweis zu (b): Berechne $T(BA)$.

b.w.

Aufgabe E

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei $V = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\colon A + A^t = 0\}$ der Vektorraum der schiefsymmetrischen reellen $n \times n$-Matrizen.

(a) Für jedes $A \in V$ gilt: A hat keine von 0 verschiedenen reellen Eigenwerte.

(b) Für $A \in V$ setzen wir $\phi(A) := (I + A)(I - A)^{-1}$. Dann ist $\phi(A) \in \mathrm{SO}(n)$ und $\det(I + \phi(A)) \neq 0$.

(c) Für $B \in \mathrm{SO}(n)$ mit $\det(I+B) \neq 0$ ist die Matrix $\psi(B) := (B-I)(B+I)^{-1}$ schiefsymmetrisch.

(d) Die Abbildung $\phi\colon V \to \mathrm{SO}(n)$ ist eine Bijektion von V auf die Teilmenge $\{B\colon \det(I + B) \neq 0\}$ von $\mathrm{SO}(n)$.