Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
2. Juni 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 6

Abgabe: Freitag, 9. Juni 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Aufgabe 21
Seien m, $n \in \mathbb{N}$, sei $V = \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Zeige, daß durch $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(AB^*)$ (A, $B \in V$) ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V definiert ist.

(b) Sei $r \in \mathbb{N}$, seien $A_1, \dots, A_r \in V$ fixiert, und sei $f\colon V \to \mathbb{K}^r$ die lineare Abbildung
$$f(B) = \big(\mathrm{tr}(BA_1^*), \dots, \mathrm{tr}(BA_r^*)\big)$$
Bestimme die zu f adjungierte Abbildung f^{ad} (bezüglich dem Skalarprodukt (a) auf V und dem kanonischen Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^r$).

Aufgabe 22
Seien m, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: $\mathrm{rk}(A^tA) = \mathrm{rk}(A)$.

(b) Stimmt Aussage (a) auch für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$?

Aufgabe 23
Bestimme eine orthogonale Matrix S so, daß S^tAS eine Diagonalmatrix ist, für
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24
Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$, sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Genau dann ist f normal, wenn $||f^{\mathrm{ad}}(v)|| = ||f(v)||$ für alle $v \in V$ gilt.

Aufgabe F
(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei V ein euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Seien $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$ die (reellen) Eigenwerte von f. Zeige
$$\lambda_1 = \min\big\{\langle f(v), v\rangle \colon v \in V,\ \|v\| = 1\big\}$$
und
$$\lambda_n = \max\big\{\langle f(v), v\rangle \colon v \in V,\ \|v\| = 1\big\}.$$