Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
9. Juni 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 7

Abgabe: Freitag, 16. Juni 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Aufgabe 25

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, und seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\prod_{j=1}^{n}(t - \alpha_j) \;=\; t^n + \sum_{i=1}^{n} a_i t^{n-i}$$

(im Polynomring $\mathbb{R}[t]$). Zeige: $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 \Leftrightarrow (-1)^i a_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Aufgabe 26

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$, und seien f, g normale Endomorphismen von V. Dann gilt:

$$f \circ g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g \circ f = 0.$$

Aufgabe 27

Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ist die Operatornorm $\|A\|$ von A definiert als

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| \colon x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\| = 1\}.$$

Sei weiter

$$\rho(A) \;:=\; \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

der *Spektralradius* von A. Zeige $\|A\| \geq \rho(A)$, sowie Gleichheit falls A normal ist.

Aufgabe 28

(a) Zeige, daß die symmetrische reelle Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 8 & 4 & -10 \\ 4 & 20 & -14 \\ -10 & -14 & 17 \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit ist, und berechne $\sqrt{A}$.

(b) Finde die Zerlegung $A = PS$ mit $P \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ positiv definit und $S \in \mathrm{O}(2)$ für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe G*

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Seien $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk}) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, und sei $C = (c_{jk}) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ definiert durch

$$c_{jk} \;=\; a_{jk} b_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, n)$$

Für X, $Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sei $\gamma(X, Y) := \mathrm{tr}(XAY^t B)$. Zeige:

(a) γ ist eine symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
(b) Sind A, $B \succ 0$, so ist $\gamma \succ 0$.
(c) Für $X = \mathrm{diag}(x)$, $Y = \mathrm{diag}(y)$ mit x, $y \in \mathbb{R}^n$ ist $\gamma(X, Y) = x^t C y$.
(d) Sind A, $B \succ 0$, so ist auch $C \succ 0$.

Hinweis: Benutze Eigenschaften der Spur und Quadratwurzeln aus positiv definiten Matrizen.