Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
16. Juni 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 8

Abgabe: Freitag, 23. Juni 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Aufgabe 29

Sei A ein kommutativer Ring. Für beliebige Ideale I, I_1, I_2, I_3 von A gilt

(a) $I + \langle 0\rangle = I,\ \ I\langle 1\rangle = I$,
(b) $(I_1 + I_2) + I_3 = I_1 + (I_2 + I_3)$,
(c) $(I_1 I_2)I_3 = I_1(I_2 I_3)$,
(d) $I_1(I_2 + I_3) = I_1 I_2 + I_1 I_3$.

Bestimme alle kommutativen Ringe A, für welche die Menge $\mathcal{I}_A$ aller Ideale von A, versehen mit Idealsumme und Idealprodukt, selbst ein kommutativer Ring ist. (Begründung!)

Aufgabe 30

Sei A ein kommutativer Ring. Dann gilt: A ist ein Körper $\Leftrightarrow$ A enthält genau zwei verschiedene Ideale.

Aufgabe 31

Sei X eine Menge, sei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Für A, $B \in \mathcal{P}(X)$ sei

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B), \quad A \cdot B := A \cap B.$$

Dann ist $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring (das braucht nicht mehr bewiesen zu werden, siehe WS Aufgabe 9). Sei $f\colon Y \to X$ eine Abbildung von Mengen, und sei $\varphi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ die durch

$$\varphi(A) := f^{-1}(A) \quad (A \in \mathcal{P}(X))$$

definierte Abbildung. Zeige, daß φ ein Ringhomomorphismus und $\ker(\varphi)$ ein Hauptideal von $\mathcal{P}(X)$ ist.

Aufgabe 32

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, und sei $\varphi\colon \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die durch $\varphi(f) := f(0) + n\mathbb{Z}$ $(f \in \mathbb{Z}[t])$ definierte Abbildung. Beweise:

(a) φ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus,
(b) $\ker(\varphi) = \langle n, t\rangle$,
(c) $\ker(\varphi)$ ist kein Hauptideal von $\mathbb{Z}[t]$.

Aufgabe H

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei A ein kommutativer Ring, sei I ein Ideal von A mit $I \neq A$. Dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A mit $I \subseteq \mathfrak{m}$. (Benutze das Zornsche Lemma.) Folgere: Ein Element $a \in A$ ist genau dann eine Einheit von A, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A gilt $a \notin \mathfrak{m}$.