Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
23. Juni 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 9

Abgabe: Freitag, 30. Juni 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Aufgabe 33

(a) Bestimme alle Paare (x, y) ganzer Zahlen mit $1716\,x - 1474\,y + 22 = 0$.
(b) Finde ganze Zahlen a, b, c mit $42a + 10b + 15c = 1$.
(c) Bestimme alle ganzen Zahlen m, für die die Gleichung

$$39882\,x - 20142\,y + 114123\,z = m$$

mit x, y, $z \in \mathbb{Z}$ lösbar ist.

Aufgabe 34

Betrachte die Polynome $f := t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$ und $g := t^4 - t^3 - t + 1$ in $K[t]$,
(a) für $K = \mathbb{Q}$,
(b) für $K = \mathbb{F}_p$, p eine Primzahl.

Berechne jeweils den größten gemeinsamen Teiler von f und g in $K[t]$, und schreibe ihn in der Form $fr + gs$ mit Polynomen r, $s \in K[t]$. (*Hinweis*: Die Fälle $p = 2$ und $p = 3$ müssen gesondert betrachtet werden!)

Aufgabe 35

Sei A ein Hauptidealring. Zeige für $0 \neq a$, $b \in A$:
(a) a ist irreduzibel genau dann, wenn $\langle a \rangle$ ein maximales Ideal von A ist.
(b) Sind d, u, $v \in A$ mit $d \sim \mathrm{ggT}(a, b)$ und $d = au + bv$, so ist $\mathrm{ggT}(u, v) \sim 1$.

Aufgabe 36

Sei A ein faktorieller Ring. Für $0 \neq a_1, \dots, a_r, b \in A$ gilt
(a) $\langle b \rangle = \langle a_1, \dots, a_r \rangle \;\Rightarrow\; b \sim \mathrm{ggT}(a_1, \dots, a_r)$,
(b) $\langle b \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \dots \cap \langle a_r \rangle \;\Leftrightarrow\; b \sim \mathrm{kgV}(a_1, \dots, a_r)$.

Ist A ein Hauptidealring, so gilt in (a) auch die Umkehrung.

Aufgabe K

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$, sei $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \colon a,\, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Zeige:
(a) $\mathbb{Z}[i]$ ist ein Teilring von $\mathbb{C}$.
(b) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $q \in \mathbb{Z}[i]$ mit $|q - z|^2 \leq \frac{1}{2}$.
(c) $\mathbb{Z}[i]$ ist ein euklidischer Ring mit euklidischer Wertefunktion $\phi(a) := |a|^2$ für $0 \neq a \in \mathbb{Z}[i]$.

Anleitung zu (c): Für $0 \neq a$, $b \in \mathbb{Z}[i]$ benutze (b), um a durch b mit Rest zu dividieren.