Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, A. Taveira-Blomenhofer
WS 2018/19

Übungen zur Algebra

Blatt 1

Abgabe: Montag, 29. Oktober 2018, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

Sei stets A ein kommutativer Ring mit Eins.

Aufgabe 1
Sei I ein Ideal in A, und sei $IA[x]$ das von I in $A[x]$ erzeugte Ideal.

(a) Ein Polynom $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (mit $a_i \in A$) liegt genau dann in $IA[x]$, wenn alle Koeffizienten a_i in I liegen.
(b) $A[x]/IA[x] \cong (A/I)[x]$.

Aufgabe 2
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, und sei $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die durch $\varphi(f) := f(0) + n\mathbb{Z}$ ($f \in \mathbb{Z}[x]$) definierte Abbildung. Beweise:

(a) φ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus,
(b) $\ker(\varphi) = \langle n, x\rangle$,
(c) $\ker(\varphi)$ ist kein Hauptideal von $\mathbb{Z}[x]$.

Aufgabe 3
Seien A, B integre Ringe, und sei $\varphi\colon A \to B$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Dann setzt sich φ auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Quot}(A) \to \operatorname{Quot}(B)$ der Quotientenkörper fort.

Aufgabe 4
Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, und sei $\varphi\colon A \to A_S$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ der kanonische Homomorphismus. Für jedes Ideal I von A setzen wir

$$I_S := IA_S := \left\{\frac{a}{s}\colon a \in I,\ s \in S\right\} \subseteq A_S.$$

(a) I_S ist das von $\varphi(I)$ in A_S erzeugte Ideal.
(b) Jedes Ideal J von A_S hat die Form $J = I_S$ für ein geeignetes Ideal I von A.