Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, A. Taveira Blomenhofer
WS 2018/19

# Übungen zur Algebra

## Blatt 11

**Abgabe:** Montag, 21. Januar 2019, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

**Aufgabe 41**
Sei $G$ eine endliche Gruppe.

(a) Seien $N_1$, $N_2 \trianglelefteq G$, und seien $|N_1|$ und $|N_2|$ teilerfremd. Dann ist $N_1 N_2 = N_1 \times N_2$.

(b) Genau dann ist jede Sylowgruppe von $G$ normal, wenn $G$ das direkte Produkt seiner Sylowgruppen ist.

**Aufgabe 42**
Seien $p$, $q$, $r$ verschiedene Primzahlen. Ist $G$ eine Gruppe der Ordnung $p^2q$ oder $pqr$, so hat $G$ eine normale Sylowgruppe.

**Aufgabe 43**
Entscheide folgende Fragen mit Hilfe der Sylowschen Sätze:

(a) Gibt es eine einfache Gruppe der Ordnung 300?

(b) Gibt es eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 45?

*Hinweise*: Untersuche die 5-Sylowgruppen (a) bzw. die 3-Sylowgruppen (b) einer solchen Gruppe.

**Aufgabe 44**
Sei $G$ eine endliche Gruppe.

(a) Seien $K_1, \ldots, K_r \leq G$ Untergruppen vom Index 2, sei $K = \bigcap_{i=1}^r K_i$. Zeige: $[G : K]$ ist eine Potenz von 2.

(b) Seien $H_2 \leq H_1 \leq G$ Untergruppen mit $[H_1 : H_2] = 2$, und sei $N_i := \bigcap_{x \in G} x H_i x^{-1}$ $(i = 1, 2)$. Dann ist $N_1/N_2$ eine 2-Gruppe.

*Hinweis* zu (b): Für $x \in G$ zeige man $[N_1 : N_1 \cap x H_2 x^{-1}] \leq 2$, beachte, daß $N_1$, $N_2$ Normalteiler von $G$ sind, und benutze (a).