Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, A. Taveira Blomenhofer
WS 2018/19

Übungen zur Algebra

Blatt 12

Abgabe: Montag, 28. Januar 2019, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 45

Sei F ein endlicher Körper mit $\mathrm{char}(F) = p$, und sei $\mathrm{GA}_1(F)$ die Gruppe aller affin-linearen Abbildungen $f_{a,b}\colon F \to F$, $x \mapsto ax + b$ (mit a, $b \in F$ und $a \neq 0$).

(a) Zeige, daß $\mathrm{GA}_1(F)$ eine normale p-Sylowgruppe hat, und bestimme diese.

(b) Sei $G \leq \mathrm{GA}_1(F)$ eine Untergruppe. Zeige: Genau dann ist G transitiv auf F, wenn G alle Translationen $f_{1,b}$ ($b \in F$) enthält.

Aufgabe 46

Sei G eine Gruppe, und sei $G = H_0 \geq H_1 \geq \cdots \geq H_r = H$ eine Kette von Untergruppen mit $H_i \trianglelefteq H_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, r$. Ist H_{i-1}/H_i auflösbar für alle i, so ist auch die Gruppe $G/\bigcap_{x\in G} xHx^{-1}$ auflösbar.

Aufgabe 47

Sei K ein Körper, sei $G \leq \mathrm{GL}_n(K)$ die Gruppe aller invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen. Zeige für $n \leq 3$, daß die Gruppe G auflösbar ist, und bestimme das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit $G^{(n)} = \{I_n\}$.

Aufgabe 48

Sei $n \geq 2$ und sei K ein Körper. Zeige für $|K| \geq 4$: Die Gruppe $\mathrm{SL}_n(K)$ ist ihre eigene Kommutatorgruppe, und ist insbesondere nicht auflösbar.

Anleitung: Matrizen der Form $T_{ij}(a) := I_n + aE_{ij}$ mit i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ und $a \in K$ heißen Transvektionen. Versuche, Transvektionen als Kommutatoren in der Gruppe $\mathrm{SL}_n(K)$ zu schreiben. Durch elementare Zeilenumformungen von Matrizen kann man leicht zeigen, daß jede Matrix in $\mathrm{SL}_n(K)$ ein Produkt von endlich vielen Transvektionen ist (das braucht nicht bewiesen zu werden).