Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, A. Taveira Blomenhofer
WS 2018/19

Übungen zur Algebra

Blatt 13

Abgabe: Montag, 4. Februar 2019, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 49

Zeige, daß $f = x^4 - 5x^2 + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist, und bestimme $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$ als Permutationsgruppe auf den Nullstellen von f.

Aufgabe 50

Sei $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$ (mit beliebigen Wahlen der Quadratwurzeln).

(a) Bestimme das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.
(b) Zeige, daß die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ galoissch ist.
(c) Bestimme die Struktur der Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$.

Hinweis zu (b): $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) = 2$.

Aufgabe 51

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$, sei $K^{*2} = \{c^2 \colon c \in K^*\}$. Seien $a_1, \dots, a_n \in K^*$ mit $a_1^{e_1} \cdots a_n^{e_n} \notin K^{*2}$ für alle $(0,\dots,0) \neq (e_1,\dots,e_n) \in \{0,1\}^n$, und sei $L = K(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$. Zeige durch Induktion nach n:

(a) Für $c \in K^*$ ist $c \in L^{*2}$ genau dann, wenn es $e_1, \dots, e_n \in \{0,1\}$ und $b \in K^*$ gibt mit $c = b^2 a_1^{e_1} \cdots a_n^{e_n}$.
(b) $\mathrm{Gal}(L/K) \cong (C_2)^n = C_2 \times \cdots \times C_2$ (n Faktoren).

Aufgabe 52

Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung, sei p eine Primzahl, und sei $n \in \mathbb{N}$. Es gebe ein $\alpha \in L$ mit $\alpha^{p^n} \in K$ und $\alpha^{p^{n-1}} \notin K$. Dann enthält L eine primitive p^n-te Einheitswurzel. (*Hinweis:* Betrachte $\zeta = \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}$ für einen geeigneten Automorphismus σ von L/K.)