Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, A. Taveira Blomenhofer
WS 2018/19

Übungen zur Algebra

Blatt 14

Abgabe: Montag, 11. Februar 2019, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 53

Sei $f = x^3 + ax + b \in \mathbb{R}[x]$ mit a, $b \in \mathbb{R}$. Genau dann hat f drei verschiedene reelle Nullstellen, wenn $4a^3 + 27b^2 < 0$ ist.

Aufgabe 54

Zeige, daß das Polynom

$$f = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)$$

in $K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ symmetrisch ist, und drücke es durch die elementarsymmetrischen Polynome aus.

Aufgabe 55

Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $w_k := x_1^k + \cdots + x_n^k$, und sei s_k das k-te elementarsymmetrische Polynom in $x_1, \ldots, x_n$. Zeige die *Newtonsche Identität*

$$w_k - w_{k-1}s_1 + w_{k-2}s_2 - + \cdots + (-1)^{k-1}w_1 s_{k-1} + (-1)^k k s_k = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 56

Für komplexe Zahlen α, β, γ gelte

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 5, \quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 7.$$

(a) Zeige $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 9$.
(b) Berechne $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5$.