Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, A. Taveira-Blomenhofer
WS 2018/19

Übungen zur Algebra

Blatt 2

Abgabe: Montag, 5. November 2018, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

Sei stets A ein kommutativer Ring mit Eins.

Aufgabe 5

Bestimme bei gegebenen a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{Z}$ alle ganzen Zahlen x, welche die simultanen Kongruenzen

$$x \equiv a_1 \pmod 7, \quad x \equiv a_2 \pmod 9, \quad x \equiv a_3 \pmod{20}$$

lösen.

Aufgabe 6

Seien A, B zwei Ringe, sei $A \times B$ der Produktring (komponentenweise Addition und Multiplikation). Zeige: Jedes Ideal von $A \times B$ hat die Form $I \times J$ mit Idealen I von A und J von B. Welche dieser Ideale sind Primideale von $A \times B$?

Aufgabe 7

Sei S eine multiplikative Teilmenge von A, und sei I ein Ideal von A. Dann gilt

$$A_S/I_S \cong (A/I)_{\overline{S}}$$

mit I_S wie in Aufgabe 4 und mit $\overline{S} := \{\overline{s} = s + I : s \in S\}$ (eine multiplikative Teilmenge von A/I). (*Anleitung:* Konstruiere einen surjektiven Homomorphismus $A_S \to (A/I)_{\overline{S}}$ mit Kern I_S.)

Aufgabe 8

Sei A ein Ring, sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Zeige: $S := A \setminus \mathfrak{p}$ ist eine multiplikative Teilmenge von A, und $\mathfrak{p}_S$ ist ein maximales Ideal von A_S, welches jedes andere Ideal $\neq \langle 1 \rangle$ von A_S enthält.