Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, A. Taveira Blomenhofer
WS 2018/19

Übungen zur Algebra

Blatt 3

Abgabe: Montag, 12. November 2018, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 9

Sei A ein Ring derart, daß der Polynomring $A[x]$ ein Hauptidealring ist. Dann ist A ein Körper. (*Anleitung:* Für $0 \neq a \in A$ betrachte man das Ideal $\langle a, x \rangle$ in $A[x]$.)

Aufgabe 10

Man zeige, daß $A := \{f \in \mathbb{R}[x] \colon f'(0) = 0\}$ ein Teilring des Polynomrings $\mathbb{R}[x]$ ist, und daß A nicht faktoriell ist. Hierbei bezeichnet $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$. (*Anleitung*: Für die zweite Aussage untersuche man die Elemente x^2, x^3 von A darauf, ob sie irreduzibel oder prim in A sind.)

Aufgabe 11

Zerlege die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[x]$ vollständig in ihre irreduziblen Faktoren:

(a) $f = 3x^4 + 6x^3 - 12x + 10$,
(b) $f = x^4 + 4$,
(c) $f = x^6 - 7x^4 + 3x^2 + 3$,
(d) $f_n = x^4 + 3x^3 - nx^2 - 2x + 1$ (in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{Z}$).

Aufgabe 12

Zerlege das Polynom
$$f = x^4 + 2\,x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$$
in $\mathbb{F}_2[x]$ und in $\mathbb{F}_3[x]$ in seine irreduziblen Faktoren. Warum folgt aus diesen Zerlegungen, daß f irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ ist?