Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, A. Taveira Blomenhofer
WS 2018/19

Übungen zur Algebra

Blatt 4

Abgabe: Montag, 19. November 2018, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 13

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f = x^3 - x + 2$, und sei $\beta := \alpha^2 + 1$. Zeige, daß f irreduzibel ist und $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt. Bestimme das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$ und schreibe β^{-1} als Linearkombination von 1, α, α^2.

Aufgabe 14

Bestimme für jede der beiden folgenden Zahlen β das Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$:

(a) $\beta = \sqrt{2} + \sqrt{7}$,
(b) $\beta = \alpha^2 - 4\alpha$ mit $\alpha^4 - 8\alpha^3 + 20\alpha^2 - 16\alpha + 2 = 0$.

Aufgabe 15

Seien $K \subseteq L$ eine algebraische Körpererweiterung, seien α, $\beta \in L$, und sei $f := \mathrm{MinPol}(\alpha/K)$, $g := \mathrm{MinPol}(\beta/K)$. Genau dann ist f irreduzibel über $K(\beta)$, wenn g irreduzibel über $K(\alpha)$ ist. Beides ist der Fall, wenn $\deg(f)$ und $\deg(g)$ zueinander teilerfremd sind.

Aufgabe 16

Gegeben sei jeweils ein Polynom $f \in K[x]$. Bestimme den Grad des Zerfällungskörpers von f über K:

(a) $f = x^4 + 1$ und $K = \mathbb{Q}$,
(b) $f = x^3 - 2$ und $K = \mathbb{F}_p$ mit $p = 3, 5, 7$.