



Übungen zur Algebra

Blatt 5

Abgabe: Montag, 26. November 2018, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 17

Sei E/K eine Körpererweiterung, seien L_1, L_2 zwei Zwischenkörper von E/K , und sei L_1L_2 der von L_1 und L_2 erzeugte Teilkörper von E . Dann ist $[L_1L_2 : L_2] \leq [L_1 : K]$.

Aufgabe 18

Unter den Voraussetzungen von Aufgabe 17 sei L_1/K endlich. Zeige an einem Beispiel, daß im allgemeinen $[L_1L_2 : L_2]$ kein Teiler von $[L_1 : K]$ zu sein braucht. (*Hinweis:* Wähle ein geeignetes kubisches Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ und betrachte $L_j = \mathbb{Q}(\alpha_j)$ ($j = 1, 2$) mit Nullstellen α_1, α_2 von f .)

Aufgabe 19

Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L^*$. Es gebe teilerfremde natürliche Zahlen m, n mit $\alpha^m \in K$ und $\beta^n \in K$. Dann ist $K(\alpha, \beta) = K(\alpha\beta)$.

Aufgabe 20

Sei $\text{char}(K) \neq 2$, seien $a, b \in K^*$ mit $a, b, ab \notin K^{*2}$.

- (a) $[K(\sqrt{a}, \sqrt{b}) : K] = 4$.
- (b) $K(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = K(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.