



Übungen zur Algebra

Blatt 6

Abgabe: Montag, 3. Dezember 2018, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

Sei stets K ein Körper.

Aufgabe 21

Sei $\text{char}(K) = 2$, und sei L/K eine quadratische Körpererweiterung. Man zeige, daß genau einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

- (1) Es gibt ein $\alpha \in L \setminus K$ mit $\alpha^2 + \alpha \in K$;
- (2) es gibt ein $\alpha \in L \setminus K$ mit $\alpha^2 \in K$.

Weiter zeige man, daß die Erweiterung L/K im ersten Fall separabel und im zweiten Fall inseparabel ist.

Aufgabe 22

Der Körper K sei vollkommen, sei L/K eine algebraische Erweiterung. Dann ist auch L vollkommen.

Aufgabe 23

Sei $\text{char}(K) = 0$, sei E/K eine algebraische Erweiterung, und seien $\alpha, \beta \in E$ mit $\deg(\alpha/K) = 2$ und $\deg(\beta/K) = 3$. Beweise, daß dann $K(\alpha, \beta) = K(\alpha + \beta)$ ist. (*Hinweis:* Entwickle Potenzen von $\alpha + \beta$ nach einer geeigneten Basis von $K(\alpha, \beta)$.)

Aufgabe 24

Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) = p > 0$, und sei $a \in K$ derart, daß $f = x^p - x + a$ keine Nullstelle in K hat. Zeige: Das Polynom f ist irreduzibel über K . (*Hinweis:* Berechne $f(x+1)$.)