Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, A. Taveira Blomenhofer
WS 2018/19

Übungen zur Algebra

Blatt 7

Abgabe: Montag, 10. Dezember 2018, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 25

Sei $F := \mathbb{F}_2[x]/\langle f\rangle$ mit $f = x^4 + x + 1$.

(a) Zeige, daß F ein Körper mit 16 Elementen ist, und daß die Gruppe F^* von $\alpha := \overline{x}$ erzeugt wird.

(b) Schreibe für jedes Polynom $0 \neq p \in \mathbb{F}_2[x]$ mit $\deg(p) \leq 3$ das Element $p(\alpha)$ als Potenz von α.

(c) Bestimme alle Teilkörper von F.

Aufgabe 26

Sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $x^{80}-1$ über $\mathbb{F}_7$. Bestimme den Körpergrad $[L : \mathbb{F}_7]$.

Aufgabe 27

Sei $f := x^4 + 1$.

(a) Für jeden Körper K mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ gilt: Genau dann hat f eine Nullstelle in K, wenn K eine primitive 8-te Einheitswurzel enthält.

(b) Für jede Primzahl $p > 2$ hat f eine Nullstelle in $\mathbb{F}_{p^2}$.

(c) Das Polynom f ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$, aber reduzibel über $\mathbb{F}_p$ für jede Primzahl p.

Aufgabe 28

Sei F ein endlicher Körper mit q Elementen, wobei q ungerade sei. Zeige:

(a) $[F^* : F^{*2}] = 2$, d. h. es gibt genau zwei Quadratklassen in F^*.

(b) Zu jedem $u \in F$ gibt es x, $y \in F$ mit $u = x^2 + y^2$.

Anleitung zu (b): Zeige zunächst, daß es x, $y \in F$ so gibt, daß $x^2 + y^2$ kein Quadrat in F ist.