



## Übungen zur Algebra

### Blatt 8

**Abgabe:** Montag, 17. Dezember 2018, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

#### Aufgabe 29

Sei  $G$  eine Gruppe.

- (a) Ist  $H \leq G$  eine Untergruppe mit  $[G : H] = 2$ , so ist  $H$  ein Normalteiler von  $G$ .
- (b) Ist die Faktorgruppe  $G/Z(G)$  zyklisch, so ist  $G$  abelsch.

#### Aufgabe 30

Seien  $r, s \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(r, s) = 1$ , und sei  $G$  eine abelsche Gruppe mit  $|G| = rs$ . Beweise ohne Verwendung des Struktursatzes für endliche abelsche Gruppen: Die Gruppe  $G$  hat genau eine Untergruppe  $H$  mit  $|H| = r$  und genau eine Untergruppe  $K$  mit  $|K| = s$ , und es gilt  $G = H \times K$  (internes direktes Produkt).

#### Aufgabe 31

Sei  $K$  ein Körper, sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige

$$Z(\text{GL}_n(K)) = \{aI : a \in K^*\},$$

wobei  $I$  die Einheitsmatrix sei.

#### Aufgabe 32

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $S_n$  die symmetrische Gruppe und  $A_n$  die alternierende Gruppe auf  $\{1, \dots, n\}$ . Zeige:

- (a) Für  $n \geq 3$  ist  $Z(S_n) = \{\text{id}\}$ .
- (b) Für  $n \geq 4$  ist  $Z(A_n) = \{\text{id}\}$ .