Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, A. Taveira Blomenhofer
WS 2018/19

Übungen zur Algebra

Blatt 9

Abgabe: Montag, 7. Januar 2019, 10.00 Uhr, in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 33

Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$, sei $\pi\colon G \to G/N$ der kanonische Homomorphismus. Genau dann hat N ein Komplement in G, wenn es einen Homomorphismus $s\colon G/N \to G$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_{G/N}$ gibt.

Aufgabe 34

Sei G eine Gruppe.

(a) Ist $f\colon M \to N$ ein Isomorphismus von G-Mengen, so gilt $G_x = G_{f(x)}$ für alle $x \in M$.

(b) Für H, $K \leq G$ sind die G-Mengen G/H und G/K genau dann isomorph, wenn es ein $g \in G$ mit $K = gHg^{-1}$ gibt.

Aufgabe 35

Die endliche Gruppe G operiere auf der endlichen Menge M. Für $g \in G$ sei $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in M\colon gx = x\}$. Zeige: Es gibt genau

$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

verschiedene G-Bahnen in M. (*Anleitung:* Zähle die Elemente der Menge $\{(g,x) \in G \times M\colon gx = x\}$ auf zwei verschiedene Weisen.)

Aufgabe 36

Sei $D_4 = \langle\sigma\rangle \rtimes \langle\tau\rangle$ die Diedergruppe des Quadrats, mit $\mathrm{ord}(\sigma) = 4$, $\mathrm{ord}(\tau) = 2$ und $(\sigma\tau)^2 = e$. Bestimme alle Untergruppen und Normalteiler von D_4 und zeichne das Inklusionsdiagramm der Untergruppen.

Die folgenden Aufgaben W1–W4 sind freiwillige Zusatzaufgaben, damit es niemand in der Weihnachtspause langweilig wird: ☺

Aufgabe W1

Seien $1 \leq m < n$ natürliche Zahlen mit $\mathrm{ggT}(10m, n) = 1$, und sei $q = \frac{m}{n}$. Zeige:

(a) Die Dezimalentwicklung der Zahl q ist periodisch, d.h. es gibt $r \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_r \in \{0, \dots, 9\}$ mit

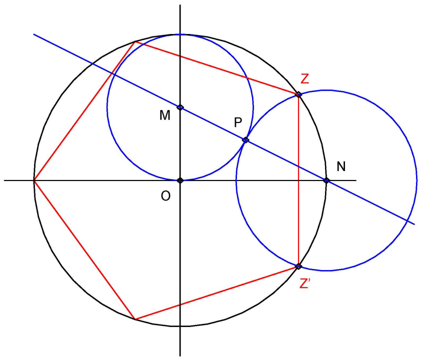
$$q \;=\; \alpha \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{10^i}, \quad \alpha \;:=\; \sum_{j=0}^{\infty} 10^{-jr} = \frac{10^r}{10^r - 1}.$$

(b) Die dezimale Periodenlänge von q (d.h. das kleinstmögliche r in (a)) ist gleich der Ordnung von $\overline{10} = 10 + n\mathbb{Z}$ in der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/n)^*$.

(c) Was ist die Periodenlänge von $(10^k + 1)^{-1}$, für $k \in \mathbb{N}$?

Aufgabe W2

Verifiziere die in der Vorlesung angegebene Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks: Sei $N = 1$ und $M = \frac{i}{2}$, und sei P ein Schnittpunkt von $K_M(O)$ (:= Kreis um M, welcher durch $O = (0, 0)$ geht) mit der Gerade durch M und N. Zeige: Die Schnittpunkte Z und $Z' = \overline{Z}$ von $K_N(P)$ mit dem Einheitskreis $K_O(N)$ sind primitive zehnte Einheitswurzeln. Im folgenden Bild ist die Strecke $[Z, Z']$ also die Seite eines regelmäßigen Fünfecks, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist:



Hinweis: Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive 5te Einheitswurzel. Stelle zunächst eine quadratische Gleichung für $\zeta + \zeta^{-1}$ über $\mathbb{Q}$ auf.

Aufgabe W3

Sei $W \subseteq \mathbb{R}^3$ der Würfel mit den 8 Eckpunkten $E = \{(a, b, c) \colon a, b, c = \pm 1\}$. Sei G die Drehgruppe des Würfels, also

$$G = \{f \in \mathrm{SO}(3) \colon f(W) = W\} = \{f \in \mathrm{SO}(3) \colon f(E) = E\}.$$

(a) Eine Raumdiagonale von W ist eine Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\{v, -v\} \subseteq L$ für ein $v \in E$. Zeige, daß G auf der Menge der Raumdiagonalen von W operiert.

(b) Die Operation (a) ist treu, d.h. ist $f \in G$ mit $f(L) = L$ für jede Raumdiagonale L von W, so ist f die Identität.

(c) Die Gruppe G ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4.

Aufgabe W4

In einem bekannten Spiel sind in einem Quadrat mit 4×4 Feldern fünfzehn quadratische Steine mit den Nummern 1 bis 15 so angebracht, daß sie sich nur horizontal oder vertikal in das jeweils leere sechzehnte Feld verschieben lassen:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	

Für welche Permutationen $i \mapsto a_i$ der Zahlen 1 bis 15 läßt sich die rechte Stellung aus der linken Ausgangsposition durch endlich viele solche Züge herstellen? Die Antwort lautet: Das geht genau dann, wenn die Permutation $i \mapsto a_i$ gerade ist. Beweis?

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!