Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
SS 2018

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 1

Abgabe: Mittwoch, 25. April 2018, 11 Uhr in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 1
Bestimme alle primitiven pythagoräischen Tripel (a, b, c) mit $1 \leq a < b < c$ und $c \leq 50$.

Aufgabe 2
Sei $d \in \mathbb{N}$ ein Nichtquadrat, sei $\sqrt{d}$ eine der beiden reellen Quadratwurzeln aus d, und sei $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d}\colon a,\ b \in \mathbb{Z}\}$, ein Teilring von $\mathbb{R}$. Für $\alpha = a + b\sqrt{d}$ mit $a,\ b \in \mathbb{Z}$ setzen wir $\alpha' := a - b\sqrt{d}$.

(a) Für $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sei $\mathrm{N}(\alpha) := \alpha\alpha'$. Dann gilt $\mathrm{N}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{N}(\alpha\beta) = \mathrm{N}(\alpha)\,\mathrm{N}(\beta)$ für $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
(b) $\mathrm{N}(\alpha) = \pm 1 \ \Leftrightarrow\ \alpha$ ist Einheit von $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
(c) Hat die Pellsche Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ eine ganzzahlige Lösung (x, y) mit $y \neq 0$, so hat sie unendlich viele solche Lösungen.

Aufgabe 3
Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $N \subseteq M$ ein A-Untermodul. Ist M endlich erzeugt, so ist auch M/N endlich erzeugt. Sind M/N und N endlich erzeugt, so ist auch M endlich erzeugt.

Aufgabe 4
Zeige oder widerlege: $\mathbb{Q}$ ist als $\mathbb{Z}$-Algebra endlich erzeugt, d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}[q_1, \ldots, q_n]$.