Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
SS 2018

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 10

Abgabe: Mittwoch, 27. Juni 2018, 11.30 Uhr in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 37

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $L = K(i)$ mit $i^2 = -1$. Zeige:

(a) $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\omega]$ mit $\omega = \frac{1}{2}(i + \sqrt{3})$;

(b) die quadratische Erweiterung L/K ist unverzweigt, d.h. jedes Primideal von K ist unverzweigt in L.

Hinweis: Es ist $L = K_1 K_2$ mit $K_1 = \mathbb{Q}(i)$ und $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Verwende Korollar II.1.23 der Vorlesung.

Aufgabe 38

Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen p mit $f(n) \equiv 0 \pmod{p}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 39

Sei p eine ungerade Primzahl, sei $e \in \mathbb{N}$.

(a) Das Element $\overline{1+p} = 1 + p + p^e\mathbb{Z}$ hat in der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/p^e)^*$ die genaue Ordnung p^{e-1}.

(b) Die Gruppe $(\mathbb{Z}/p^e)^*$ ist zyklisch.

Hinweis: Für (a) benutze man Lemma V.1.2 aus der Vorlesung. Für (b) betrachte den Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}/p^e)^* \to (\mathbb{Z}/p)^*$, $x + p^e\mathbb{Z} \mapsto x + p\mathbb{Z}$.

Aufgabe 40

Sei $e \in \mathbb{N}$, $e \geq 3$.

(a) Das Element $\overline{5} = 5 + 2^e\mathbb{Z}$ hat in der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/2^e)^*$ die genaue Ordnung 2^{e-2}.

(b) $(\mathbb{Z}/2^e)^* \cong C_2 \times C_{2^{e-2}}$.

Hinweis: C_m bezeichnet eine zyklische Gruppe der Ordnung m. Verwende Lemma V.1.2 und betrachte den Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}/2^e)^* \to (\mathbb{Z}/4)^*$.

Aufgabe H

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei K ein Zahlkörper. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen, die in K total zerlegt sind. (*Anleitung:* Reduziere auf den Fall, wo $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist, und benutze die Aufgaben C und 38.)