Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
SS 2018

**Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie**

**Blatt 11**

**Abgabe:** Mittwoch, 4. Juli 2018, 11.30 Uhr in die Briefkästen auf F4

**Aufgabe 41**
Sei $p$ eine Primzahl und $e \in \mathbb{N}$, sei $m \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu $p$.

(a) Ist $p > 2$, so ist $m$ ein Quadrat modulo $p^e$ genau dann, wenn $m$ ein Quadrat modulo $p$ ist.

(b) Wie muß man die zweite Bedingung aus (a) im Fall $p = 2$ ändern?

(*Hinweis*: Verwende Aufgaben 39 und 40)

**Aufgabe 42**
Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$ gilt $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\zeta_m)\,\mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{mn})$.

**Aufgabe 43**
Zu jeder endlichen abelschen Gruppe $G$ gibt es eine galoissche Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong G$. (*Hinweis:* Man zeige, daß es für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ einen surjektiven Homomorphismus $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \to G$ gibt. Warum genügt das?)

**Aufgabe 44**
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ mit $\zeta = \zeta_n$. Dann ist

$$K \cap \mathbb{R} \;=\; \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) \;=\; \mathbb{Q}\Big(\cos \frac{2\pi}{n}\Big).$$

**Aufgabe I**
(Freiwillige Zusatzaufgabe) Die Klassenzahl des Körpers $\mathbb{Q}(\zeta_{23})$ ist durch 3 teilbar. — *Anleitung:* Laut Vorlesung ist $\mathbb{Q}(\sqrt{-23}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{23})$. Zerlege die Primzahl 2 in $\mathbb{Q}(\zeta_{23})$ und benutze die Ergebnisse von Aufgabe 29.