Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
SS 2018

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 12

Abgabe: Mittwoch, 11. Juli 2018, 11.30 Uhr in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 45

Sei $p > 2$ eine Primzahl. Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid n$ gilt

$$\left(\frac{n}{p}\right) \equiv n^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Aufgabe 46

Beweise das quadratische Reziprozitätsgesetz sowie die beiden Ergänzungssätze für das Jacobisymbol: Für ungerade teilerfremde natürliche Zahlen m, n gilt

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}$$

sowie

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}.$$

Aufgabe 47

Sei p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \pmod{4}$. Dann ist die Klassenzahl von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ größer als 1.

Anleitung: Benutze den Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Progressionen, um eine Primzahl $q \neq p$ mit $q \equiv 5 \pmod{8}$ und $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ zu finden. Untersuche dann die in der Zerlegung von q vorkommenden Primideale von K.

Aufgabe 48

Sei p eine Primzahl mit $p \equiv -1 \pmod{4}$. Genau dann ist $2p+1$ eine Primzahl, wenn $2p+1$ ein Teiler von $2^p - 1$ ist. (*Hinweis*: Betrachte die multiplikative Ordnung von 2 modulo $2p+1$.)

Aufgabe K

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Für $n \geq 0$ ist die n-te Fermatzahl definiert durch $F_n = 2^{2^n} + 1$. Man rechnet leicht nach, daß F_n prim ist für $n \leq 4$. Fermat vermutete, daß F_n für alle $n \in \mathbb{N}$ prim ist, aber Euler zeigte, daß dies bereits für $n = 5$ falsch ist. Es ist nicht bekannt, ob es überhaupt ein $n \geq 5$ gibt, so daß F_n eine Primzahl ist. Zeige:

(a) Ist $n \geq 1$ und F_n prim, so erzeugt 3 die multiplikative Gruppe des Körpers mit F_n Elementen.

(b) Für $n \geq 1$ gilt:

$$F_n \text{ ist prim} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2^{2^n-1}} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$