Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
SS 2018

# Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

## Blatt 3

**Abgabe:** Mittwoch, 9. Mai 2018, 11.30 Uhr in die Briefkästen auf F4

### Aufgabe 9

Sei $K$ ein Körper, sei $f \in K[x]$ irreduzibel und normiert mit $\deg(f) = n$, und sei $\alpha \in \overline{K}$ eine Nullstelle von $f$. Für $a$, $b \in K$ mit $a \neq 0$ ist

$$\mathrm{N}_{K(\alpha)/K}(b - a\alpha) \;=\; a^n\, f\Big(\frac{b}{a}\Big).$$

### Aufgabe 10

Sei $K$ ein Körper, und seien $a$, $b \in K$ derart, daß $f = x^5 + ax + b \in K[x]$ irreduzibel ist. Für die Diskriminante von $f$ gilt dann

$$D(f) \;=\; 4^4 a^5 + 5^5 b^4.$$

### Aufgabe 11

Sei $K$ ein Zahlkörper. Eine Teilmenge $M \subseteq K$ ist genau dann ein Gitter in $K$, wenn es eine Ordnung $R$ in $K$, ein Ideal $I \neq \langle 0 \rangle$ von $R$ und ein $k \geq 1$ gibt mit $M = \frac{1}{k}\, I$. (*Hinweis:* Ist $M$ ein gegebenes Gitter, so betrachte man den Multiplikatorenring von $M$.)

### Aufgabe 12

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ und $F = KL$. Zeige: Das Element $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ liegt in $\mathcal{O}_F$, aber nicht in $\mathcal{O}_K\mathcal{O}_L$ (dem von $\mathcal{O}_K$ und $\mathcal{O}_L$ erzeugten Teilring von $F$).

### Aufgabe A

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei $K$ ein Zahlkörper vom Grad $n$, seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}_K$ und $d = d_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Es soll gezeigt werden, daß $d \equiv 0$ oder $d \equiv 1 \pmod 4$ gilt:

Laut Vorlesung ist $d = \det(V)^2$ mit $V = (\sigma_i(\alpha_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ und $\mathrm{Hom}(K, \mathbb{C}) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Schreibe $\det(V) = P - N$, wobei $P$ (bzw. $N$) die Summe der Terme zu geraden (bzw. ungeraden) Permutationen in der Leibnizformel für die Determinante ist. Nun gehe man wie folgt vor:

(a) $P$ und $N$ sind ganz über $\mathbb{Z}$.
(b) $P + N$ und $PN$ liegen in $\mathbb{Q}$.
(c) Folgere $P + N$, $PN \in \mathbb{Z}$, und zeige daraus die Behauptung.

*Hinweis zu (b)*: Sei $L$ die galoissche Hülle von $K/\mathbb{Q}$. Zeige, daß $P + N$ und $PN$ invariant unter $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sind.