Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
SS 2018

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 4

Abgabe: Mittwoch, 16. Mai 2018, 11.30 Uhr in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 13
Sei K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper. Bestimme die Einheitengruppe von K, also die Gruppe $\mathcal{O}_K^*$.

Aufgabe 14
Sei K ein quadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$. Zeige: Die Ordnungen in K sind genau die Ringe $R_f := \mathbb{Z} + f\mathcal{O}_K$, wobei $f \geq 1$ eine ganze Zahl ist. (*Hinweis:* Für eine gegebene Ordnung R wähle $f \in \mathbb{N}$ minimal mit $f\mathcal{O}_K \subseteq R$.)

Aufgabe 15
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 - \alpha + 3 = 0$, sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.
(a) Berechne $\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha^i)$ für $0 \leq i \leq 4$.
(b) Bestimme die Diskriminante von $\mathbb{Z}[\alpha]$.
(c) Zeige: Der Ganzheitsring von K ist $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.

Aufgabe 16
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Berechne die Diskriminante von $\mathbb{Z}[\alpha]$ und zeige $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$. (*Hinweis:* Aufgabe A)

Aufgabe B
(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein normiertes Eisensteinpolynom vom Grad n bezüglich der Primzahl p. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Dann ist der Index $[\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]]$ nicht durch p teilbar.

Anleitung: Angenommen falsch. Zeige, daß es dann ein $\beta \in \mathcal{O}_K$ gibt mit $p\beta \in \mathbb{Z}[\alpha]$ und $\beta \notin \mathbb{Z}[\alpha]$, und daß man dabei $\beta \in \mathbb{Q}\alpha^{n-1}$ erreichen kann. (*Hinweis*: Multipliziere mit α.) Nun betrachte die Norm von β.