Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
SS 2018

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 5

Abgabe: Mittwoch, 23. Mai 2018, 11.30 Uhr in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 17
Sei A ein Dedekindring, sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A, und seien I, J gebrochene Ideale von A. Beweise
$$v_{\mathfrak{p}}(I+J) \;=\; \min\{v_{\mathfrak{p}}(I),\, v_{\mathfrak{p}}(J)\}, \quad v_{\mathfrak{p}}(I\cap J) \;=\; \max\{v_{\mathfrak{p}}(I),\, v_{\mathfrak{p}}(J)\}.$$

Aufgabe 18
Sei $f = x^3 + 2x^2 + 6$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0$, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Berechne explizit die Produktzerlegung von p in Primideale von $\mathcal{O}_K$ für $p = 2, 3, 5, 7$ und 17, sowie die Restklassengrade der beteiligten Primideale. (*Bemerkung*: Es ist $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, wie man mit Aufgabe A sehen kann, das braucht nicht bewiesen zu werden.)

Aufgabe 19
Sei K ein quadratischer Zahlkörper, sei p eine Primzahl, und sei $\langle p\rangle = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ mit Primidealen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ von $\mathcal{O}_K$ (nicht notwendig voneinander verschieden).

(a) $\mathfrak{p}_1$ ist ein Hauptideal von $\mathcal{O}_K$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p}_2$ ist ein Hauptideal von $\mathcal{O}_K$.
(b) Genau dann sind $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ Hauptideale von $\mathcal{O}_K$, wenn es ein $\alpha \in \mathcal{O}_K$ gibt mit $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \pm p$.

Aufgabe 20
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, $d \leq 10$ und $d \not\equiv 1 \pmod 4$. Entscheide, ob das Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}_K$ mit $\mathfrak{p}^2 = \langle 2\rangle$ ein Hauptideal ist. Falls das der Fall ist, gib einen Erzeuger von $\mathfrak{p}$ an.

Aufgabe C
(Freiwillige Zusatzaufgabe)

(a) Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung derart, daß der Index (der additiven Gruppen) $m := [B : A]$ endlich ist, und sei $k \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu m. Dann ist der natürliche Ringhomomorphismus $A/kA \to B/kB$ ein Isomorphismus.
(b) Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, und sei α Nullstelle eines Eisensteinpolynoms bezüglich der Primzahl p. Dann ist $\mathfrak{p} := \langle p, \alpha\rangle$ ein Primideal in $\mathcal{O}_K$, und es gilt $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^n$ mit $n = [K : \mathbb{Q}]$.

Hinweis zu (b): Betrachte die Erweiterung $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathcal{O}_K$ und benutze Aufgabe B.