Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
SS 2018

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 6

Abgabe: Mittwoch, 30. Mai 2018, 11.30 Uhr in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 21

Sei $K = \mathbb{Q}(\omega)$ mit $\omega^2 = 11$, sei I das von $4\omega - 1$ und $\omega - 9$ in $\mathcal{O}_K$ erzeugte Ideal. Bestimme die Faktorzerlegung von I in Primideale von $\mathcal{O}_K$ und die Idealnorm $\mathrm{N}(I)$ von I. Berechne außerdem das inverse gebrochene Ideal von I in der Form $I^{-1} = \langle \alpha, \beta \rangle$ mit α, $\beta \in K$.

Aufgabe 22

Sei A ein Dedekindring. Es seien paarweise verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \neq \{0\}$ von A gegeben, sowie Elemente $x_1, \ldots, x_r \in A$ und ganze Zahlen $e_1, \ldots, e_r \geq 0$. Zeige: Es gibt ein Element $x \in A$ mit $v_{\mathfrak{p}_i}(x - x_i) = e_i$ für $i = 1, \ldots, r$. (*Hinweis*: Chinesischer Restsatz.)

Aufgabe 23

Es sei A ein Dedekindring.

(a) Seien $\{0\} \neq J \subseteq I$ ganze Ideale von A. Dann existiert ein $x \in A$ mit $I = J + Ax$.
(b) Jedes Ideal von A kann von zwei Elementen erzeugt werden.
(c) Hat A nur endlich viele Primideale, so ist A ein Hauptidealring.

Hinweis: Aufgaben 17 und 22.

Aufgabe 24

Ein Zahlkörper K heißt *normeuklidisch*, falls $\mathcal{O}_K$ bezüglich der Wertefunktion

$$\phi(x) := \left|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x)\right| \quad (x \in \mathcal{O}_K)$$

ein euklidischer Ring ist (also falls $\forall\, a,\, b \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}\ \exists\, q,\, r \in \mathcal{O}_K$ mit $a = qb + r$ und $\phi(r) < \phi(b)$). Zeige:

(a) Ist K normeuklidisch, so ist die Klassengruppe von K trivial.
(b) Genau dann ist K normeuklidisch, wenn gilt: $\forall\, \alpha \in K\ \exists\, \beta \in \mathcal{O}_K$ mit $|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha - \beta)| < 1$.
(c) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei. Entscheide für $d = 1, 2, 3, 5$, ob K normeuklidisch ist. (Anspruchsvoller: Bestimme alle quadratfreien $d \geq 1$, für die $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ normeuklidisch ist.)

Hinweis zu (c): Bette den Körper K nach $\mathbb{C}$ ein und argumentiere geometrisch mit (b).

Aufgabe D

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei K ein quadratischer Zahlkörper mit $d_K < -11$. Zeige:

(a) Für jede Nichteinheit $0 \neq \alpha \in \mathcal{O}_K$ ist $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \geq 4$.

(b) Der Ring $\mathcal{O}_K$ ist nicht euklidisch (bezüglich irgend einer Wertefunktion).

Hinweis zu (b): Angenommen, es gebe eine euklidische Wertefunktion $\phi\colon \mathcal{O}_K \to \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wähle eine Nichteinheit $0 \neq \alpha \in \mathcal{O}_K$ mit minimalem $\phi(\alpha)$ und zeige: Jedes $\beta \in \mathcal{O}_K$ ist modulo $\langle \alpha \rangle$ kongruent zu 0 oder ± 1. Benutze jetzt (a), um daraus einen Widerspruch zu konstruieren.