



Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 7

Abgabe: Mittwoch, 6. Juni 2018, 11.30 Uhr in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 25

Zeige: Der reell-quadratische Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist normeuclidisch. (Skizze!)

Aufgabe 26

Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$. Zeige:

- (a) $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$,
- (b) K hat Klassenzahl 1.

Aufgabe 27

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$, und sei $\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-23})$. Zeige für das Ideal $\mathfrak{p} = \langle 2, \omega \rangle$:

- (a) $\mathfrak{p}^3 = \langle \omega - 2 \rangle$,
- (b) \mathfrak{p} ist kein Hauptideal von \mathcal{O}_K ,
- (c) die Klassenzahl von K ist durch 3 teilbar.

Aufgabe 28

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 = 2$. Zeige, daß $\mathbb{Z}[\alpha]$ ein Hauptidealring ist.

Aufgabe E

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 = 2$. Zerlege die Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13 und 31 explizit in Primfaktoren im Hauptidealring $\mathbb{Z}[\alpha]$ (siehe Aufgabe 28).