



## Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

### Blatt 8

**Abgabe:** Mittwoch, 13. Juni 2018, 11.30 Uhr in die Briefkästen auf F4

#### Aufgabe 29

Berechne die Klassengruppe von  $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ . (Siehe dazu Aufgabe 27.)

#### Aufgabe 30

Sei  $m \in \mathbb{N}$  kein Quadrat, es bezeichne  $\sqrt{m}$  die positive Quadratwurzel. Betrachte die Ordnung  $R = \mathbb{Z}[\omega]$  in  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$  mit

- (a)  $\omega = \sqrt{m}$ ,
- (b)  $\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{m})$  (nur im Fall  $m \equiv 1 \pmod{4}$ ).

Zeige: Die Grundeinheit von  $R$  ist  $u = a + b\omega$  mit ganzen Zahlen  $a \geq 0$ ,  $b \geq 1$  derart, daß  $N_{K/\mathbb{Q}}(a + b\omega) = \pm 1$  und dabei  $b$  minimal ist.

*Hinweis:* Man überlege sich zunächst, daß für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x^2 - my^2 = \pm 1$  gilt:  $x, y \geq 0 \Leftrightarrow x + y\sqrt{m} \geq 1$ . Es gibt einen einzigen Fall (welchen?), wo  $u$  durch die angegebene Bedingung noch nicht eindeutig festgelegt ist.

#### Aufgabe 31

- (a) Bestimme die Grundeinheit der Ordnung  $R = \mathbb{Z}[\omega]$  sowie ihre Norm, für  $\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{m})$  und alle Nichtquadrate  $m \equiv 1 \pmod{4}$  mit  $1 < m < 40$ .
- (b) Gib für die Gleichung  $x^2 + xy - 3y^2 = 1$  die drei kleinsten Lösungen  $(x, y)$  mit  $x, y \in \mathbb{N}$  an.

#### Aufgabe 32

Unter den Summen  $1 + 2 + \dots + n$  (mit  $n \in \mathbb{N}$ ) kommen unendlich viele Quadratzahlen vor. (*Hinweis:* Stelle eine Verbindung zu Einheiten in  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  her.)

#### Aufgabe F

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Die Schlacht von Hastings (14. Oktober 1066):

“Harolds Mannen standen nach alter Gewohnheit dicht gedrängt in 13 gleich großen Quadraten aufgestellt, und wehe dem Normannen, der es wagte, in eine solche Phalanx einbrechen zu wollen. Als aber Harold selbst auf dem Schlachtfeld erschien, formten die Sachsen ein einziges gewaltiges Quadrat mit ihrem König an der Spitze und stürmten mit den Schlachtrufen ‘Ut!’, ‘Olicrosse!’, ‘Godemité!’ vorwärts.”

Wie groß war (angeblich) Harolds Armee?