Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
SS 2018

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 9

Abgabe: Mittwoch, 20. Juni 2018, 11.30 Uhr in die Briefkästen auf F4

Aufgabe 33
$\mathbb{Q}(\sqrt{-47})$ hat Klassenzahl $h = 5$.

Aufgabe 34
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(x) = x^5 + 2x^4 - 2$. Zeige, daß $\mathbb{Z}[\alpha]$ ein Hauptidealring ist. (*Hinweise*: f hat Diskriminante $D(f) = -15536$, und hat genau drei reelle Nullstellen. Verwende Aufgaben B und C.)

Aufgabe 35
Sei $m \in \mathbb{N}$ kein Quadrat, und sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$. Zeige:
- (a) Hat m einen Primteiler $p \equiv 3 \pmod 4$, oder ist m durch 4 teilbar, so hat jede Einheit von R die Norm 1.
- (b) Für $m = 34$ hat jede Einheit von R die Norm 1, obwohl Bedingung (a) nicht erfüllt ist. (Benutze Aufgabe 30)

Aufgabe 36
Sei $K \subseteq L$ eine Erweiterung von Zahlkörpern, sei I ein gebrochenes Ideal von K, und sei $J = I\mathcal{O}_L$. Für die Idealnormen gilt dann
$$\mathrm{N}(J) \;=\; \mathrm{N}(I)^{[L:K]}.$$
Hinweis: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so daß I^k ein gebrochenes Hauptideal ist. Vergleiche zunächst die Idealnormen von I^k und J^k.

Aufgabe G
(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei $f = x^3 + x^2 - 2x + 8$, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $f(\alpha) = 0$. Es soll gezeigt werden, daß $\mathcal{O}_K \neq \mathbb{Z}[\gamma]$ für alle $\gamma \in \mathcal{O}_K$ ist.
- (a) Für $\beta := \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha)$ gilt $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$. Es ist $d_K = -503$.
- (b) $\mathcal{O}_K/\langle 2\rangle$ ist isomorph zum direkten Produkt $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.
- (c) Unter der Annahme $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\gamma]$ betrachte man das Minimalpolynom von γ und erzeuge einen Widerspruch zu (b).

Hinweise: Für (a) berechne man zunächst die Diskriminante von $\mathbb{Z}[\alpha]$. Für (b) betrachte man die Minimalpolynome von α und β.