Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
23. April 2018

Übungen zur Vorlesung Tropische Geometrie (SS 2018)

Blatt 1

Abgabe: Montag 30. April 2018 in der Vorlesung

Aufgabe 1
Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ eine Untergruppe mit $\mathbb{Q} \subseteq \Gamma$, und sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Γ-rationales Polyeder. Dann ist $\operatorname{relint}(P) \cap \Gamma^n$ dicht in P.

Aufgabe 2
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder. Zeige für v, $w \in \mathbb{R}^n$:

(a) Ist $\operatorname{face}_v(P) \cap \operatorname{face}_w(P) \neq \varnothing$, so ist $\operatorname{face}_v(P) \cap \operatorname{face}_w(P) = \operatorname{face}_{v+w}(P)$.

(b) $\operatorname{face}_v(\operatorname{face}_w(P)) = \operatorname{face}_{w+\varepsilon v}(P)$ für alle kleinen $\varepsilon > 0$.

Hinweis: Für (b) zeige zunächst $\operatorname{face}_{w+\varepsilon v}(P) \subseteq \operatorname{face}_w(P)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 3
Für ein Polyeder P sei $\Sigma(P)$ die Menge aller Seiten von P. Zeige:

(a) Für Polyeder P, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\Sigma(P \cap Q) = \{F \cap G\colon F \in \Sigma(P),\ G \in \Sigma(Q)\}$. Insbesondere ist $\Sigma(P \cap A) = \{F \cap A\colon F \in \Sigma(P)\}$ für jeden affin-linearen Unterraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Sind Σ_1, Σ_2 Polyederkomplexe in $\mathbb{R}^n$, so ist auch $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2 := \{P_1 \cap P_2\colon P_1 \in \Sigma_1,\ P_2 \in \Sigma_2\}$ ein Polyederkomplex.

(c) $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2$ ist die gröbste gemeinsame Verfeinerung von Σ_1 und Σ_2.

Aufgabe 4
Sei P ein Polyeder und F eine Seite von P. Für jedes $w \in \operatorname{relint}(F)$ ist

$$N_P(F)^* \ = \ \{v \in \mathbb{R}^n\colon \exists\, \varepsilon > 0\ w + \varepsilon v \in P\}.$$

Bleibt die Aussage richtig für beliebiges $w \in F$?