Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
7. Mai 2018

Übungen zur Vorlesung Tropische Geometrie (SS 2018)

Blatt 2

Abgabe: Montag 14. Mai 2018 in der Vorlesung

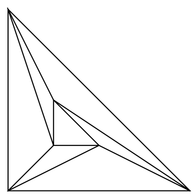
Aufgabe 5

Seien P, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Polyeder, sei $P+Q$ ihre Minkowskisumme.

(a) Für $w \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathrm{face}_w(P+Q) = \mathrm{face}_w(P) + \mathrm{face}_w(Q)$.
(b) Sei umgekehrt F eine Seite von P und G eine Seite von Q. Ist dann $F+G$ eine Seite von $P+Q$?
(c) Für die Normalenfächer gilt $\mathcal{N}(P+Q) = \mathcal{N}(P) \wedge \mathcal{N}(Q)$.

Aufgabe 6

(a) Seien $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$, und seien w, $w' \in \mathbb{R}^r$. Es gebe eine affin-lineare Abbildung $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $l(v_i) = w'_i - w_i$ $(i = 1, \dots, r)$. Dann induzieren w und w' dieselbe reguläre Unterteilung von $P = \mathrm{conv}(v_1, \dots, v_r)$.
(b) Betrachte die sechs Punkte $v_1 = \binom{0}{0}$, $v_2 = \binom{4}{0}$, $v_3 = \binom{0}{4}$, $v_4 = \binom{1}{1}$, $v_5 = \binom{2}{1}$, $v_6 = \binom{1}{2} \in \mathbb{R}^2$. Die Triangulierung von $P = \mathrm{conv}(v_1, \dots, v_6)$ aus den Dreiecken 125, 134, 145, 236, 256, 346, 456 ist nicht regulär:



Anleitung zu (b): Angenommen, es gibt $w \in \mathbb{R}^6$, welches die angegebene Unterteilung von P induziert. Reduziere zunächst auf den Fall $w_4 = w_5 = w_6 = 0$. Benutze dann die Kanten 15, 26, 34, um einen Widerspruch zu erzeugen.

Aufgabe 7

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(a) Gibt es affin-lineare Funktionen $l_1, \dots, l_r$ mit $f(x) = \min_i l_i(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist f stetig, stückweise affin-linear und konkav. (Letzteres besagt $f((1-t)x+ty) \geq (1-t)f(x)+tf(y)$ für x, $y \in \mathbb{R}^n$ und $0 \leq t \leq 1$).
(b) Ist umgekehrt f stetig, konkav und stückweise affin-linear (d.h. es gebe Mengen $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ und affin-lineare Funktionen l_i mit $f|_{U_i} = l_i|_{U_i}$ $(i = 1, \dots, r)$ und mit $U_1 \cup \cdots \cup U_r = \mathbb{R}^n$), so ist f das Minimum von endlich vielen affin-linearen Funktionen.

Aufgabe 8

Seien $l_1, \ldots, l_r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin-lineare Funktionen, sei $f(x) = \min\{l_i(x)\colon 1 \leq i \leq r\}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Zeige: Der Polyederkomplex $\Sigma(l_1, \ldots, l_r)$ (siehe Vorlesung Beispiel 1.13) ist der eindeutig bestimmte gröbste Polyederkomplex Σ mit $|\Sigma| = \mathbb{R}^n$ derart, daß f affin-linear auf jedem $P \in \Sigma$ ist.