Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
28. Mai 2018

Übungen zur Vorlesung Tropische Geometrie (SS 2018)

Blatt 3

Abgabe: Montag 7. Juni 2018 in der Vorlesung

Aufgabe 9

Sei k ein Körper, sei $K = k(x_n : n \in \mathbb{N})$ mit algebraisch unabhängigen x_n. Zeige:

(a) Es gibt eine Bewertung $v \colon K^* \to \mathbb{Q}$ von K mit $v(k^*) = 0$ und $v(x_n) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es gibt keinen homomorphen Schnitt $s \colon \mathbb{Q} \to K^*$ von v.

Anleitung zu (b): Angenommen, es gebe einen homomorphen Schnitt s. Benutze die $s(\frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N})$, um einen Widerspruch zu erzeugen.

Aufgabe 10

Sei $x = (x_1, x_2, x_3)$. Berechne alle Leitideale des Ideals $I = \langle f \rangle \subseteq K[x]$ für $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ und

$$f = 7x_1^2 + 8x_1x_2 - x_2^2 + x_1x_3 + 3x_3^2,$$

und zeichne den Gröbnerkomplex von I. Ebenso für

$$f = tx_2^2 + 3x_2x_3 - tx_3^2 + 5x_1x_2 - x_1x_3 + 2tx_1^2.$$

Aufgabe 11

Sei (K, val) ein bewerteter Körper mit Restklassenkörper k, die Bewertung val habe einen Schnitt. Sei $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ und $x = (x_0, x)$. Für $0 \neq f \in K[x']$ sei $f^h = x_0^{\deg(f)} f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$ die Homogenisierung von f. Für ein Ideal $I \subseteq K[x']$ sei $I^h = \langle f^h : 0 \neq f \in I \rangle$. Zeige für $w \in \mathbb{R}^n$: Das Ideal $\mathrm{in}_w(I)$ ist das Bild von $\mathrm{in}_{(0,w)}(I^h)$ unter dem $k[x']$-Homomorphismus $\phi \colon k[x] \to k[x']$ mit $\phi(x_0) = 1$.

Aufgabe 12

(Voraussetzung an K wie in Aufgabe 11) Sei $I \subseteq K[x]$ ein Ideal, das von Linearformen erzeugt wird. Zeige

$$\mathrm{in}_w(I) = \langle \mathrm{in}_w(f) \colon f \in I_1 \rangle$$

für jedes $w \in \mathbb{R}^n$.