Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
2. Juli 2018

Übungen zur Vorlesung Tropische Geometrie (SS 2018)

Blatt 5

Abgabe: Montag 9. Juli 2018 in der Vorlesung

Aufgabe 17

Sei G ein gewichteter gerichteter Graph mit Vertexmenge $V = \{1, \dots, n\}$ und Gewichtsmatrix $D = (d_{ij})_{i,j \in V}$. Es gelte $d_{ij} \geq 0$ und $d_{ii} = 0$ für alle i, j, und $d_{ij} \neq d_{ji}$ ist erlaubt. Die *Länge* eines Wegs $\gamma = (i_0, i_1, \dots, i_r)$ in V ist $l(\gamma) = \sum_{k=1}^{r} d_{i_{k-1} i_k}$. Zeige: Für i, $j \in V$ ist die Länge eines kürzesten Wegs von i nach j gleich dem (i, j)-Koeffizient der tropischen Matrixpotenz $D^{\odot(n-1)} = D \odot \cdots \odot D$.

Aufgabe 18

Sei $X = (x_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq n)$ die allgemeine $n \times n$-Matrix mit unbestimmten Koeffizienten x_{ij}, und sei $f = \det(X) \in K[x_{ij} \colon 1 \leq i, j \leq n]$. Sei $P \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ das Newtonpolytop von f, sei $\mathcal{N}$ der Normalenfächer von P.

(a) P besteht genau aus den doppelt-stochastischen Matrizen (mit allen Koeffizienten ≥ 0 und allen Zeilen- und Spaltensummen gleich 1).

(b) Die volldimensionalen Kegel in $\mathcal{N}$ sind in Bijektion zu den Permutationen $\pi \in S_n$.

(c) Die Kegel zu π und π' schneiden sich in einem Kegel von Kodimension eins genau dann, wenn die Permutation $\pi^{-1}\pi'$ ein Zykel ($\neq \mathrm{id}$) ist.

Aufgabe 19

Seien komplexe rationale Funktionen

$$\phi_1(t) \;=\; c_1 \prod_{j=1}^{m} (t - \alpha_j)^{u_j}, \quad \phi_2(t) \;=\; c_2 \prod_{j=1}^{m} (t - \alpha_j)^{v_j}$$

mit u_j, $v_j \in \mathbb{Z}$, c_1, $c_2 \in \mathbb{C}^*$ und paarweise verschiedenen $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ gegeben, und sei $\phi \colon \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ die rationale Abbildung

$$\phi(t) \;=\; \big(\phi_1(t),\, \phi_2(t)\big).$$

Der Zariskiabschluß von $\mathrm{im}(\phi)$ ist eine ebene rationale Kurve mit irreduzibler (affiner) Gleichung $f(x, y) = 0$. Zeige: Der Normalenfächer $\mathcal{N}$ von $P = \mathrm{New}(f)$ wird erzeugt von den Halbgeraden $\mathbb{R}_+(u_j, v_j)$ für $j = 0, \dots, m$, wobei $\sum_{j=0}^{m} (u_j, v_j) = (0, 0)$ sei.

Aufgabe 20

Berechne das Newtonpolytop $P = \mathrm{New}(f)$ in der Situation von Aufgabe 19 für

$$\phi_1(t) \;=\; \frac{t(t+2)^3}{(t+1)(t-1)^2}, \quad \phi_2(t) \;=\; \frac{(t-1)^2(t+2)}{t^2}$$

(ohne f auszurechnen).