

## Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I

### Blatt 1

**Abgabe:** Mittwoch 30. Oktober 2019

#### Aufgabe 1

Eine total geordnete Menge  $(M, \leq)$  heißt *Dedekind-vollständig*, falls für je zwei nichtleere Teilmengen  $I$  und  $J$  von  $M$  mit  $I \leq J$  gilt: Es gibt ein  $x \in M$  mit  $I \leq x \leq J$ . Man zeige:  $M$  ist genau dann Dedekind-vollständig, wenn  $M$  keinen freien Dedekindschnitt besitzt.

#### Aufgabe 2

Sei  $(K, \leq)$  ein angeordneter Körper, welcher Dedekind-vollständig ist. Dann ist  $K = \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe 3

Sei  $(K, P)$  ein angeordneter Körper, sei  $x$  eine Variable, und sei  $Q \subseteq K(x)$  die Menge aller Brüche  $\frac{f}{g}$  von Polynomen mit  $g \neq 0$ , für die entweder  $f = 0$  ist oder die Leitkoeffizienten von  $f$  und  $g$  bezüglich  $P$  dasselbe Vorzeichen haben.

- (a)  $Q$  ist eine Anordnung von  $K(x)$ , welche  $P$  fortsetzt.
- (b) Für alle  $a \in K$  gilt  $x \geq_Q a$ . Insbesondere ist  $(K(x), Q)$  nicht archimedisch.

#### Aufgabe 4

Der rationale Funktionenkörper  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  in  $n \geq 1$  Variablen über  $\mathbb{Q}$  hat sowohl archimedische wie nichtarchimedische Anordnungen.