Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Th. Mayer
WS 2019/20

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I
Blatt 11

Abgabe: Mittwoch 22. Januar 2020 um 13:30 Uhr

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 41
Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $M \subseteq R^n$ eine nichtleere semialgebraische Menge. Für alle $x \in R^n$ existiert
$$d_M(x) := \inf\{|y - x| \colon y \in M\}$$
in R. Die Abbildung $d_M \colon R^n \to R$ ist eine (stetige) semialgebraische Funktion, und $d_M^{-1}(0) = \overline{M}$.

(b) Die semialgebraischen Mengen
$$R^n, \quad]0,\infty[^n, \quad]0,1[^n \quad \text{und} \quad B_n := \{x \in R^n \colon |x| < 1\}$$
sind alle zueinander semialgebraisch homöomorph.

Aufgabe 42
Sei V eine affine R-Varietät und M eine semialgebraische Teilmenge von $V(R)$. Genau dann ist M Zariski-dicht in V, wenn jedes minimale Primideal von $R[V]$ Träger eines Punktes in $\widetilde{M}$ ist.

Aufgabe 43
Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von semialgebraischen Teilmengen von R^n. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{j\in J} M_j = \varnothing$;
(ii) für jeden reell abgeschlossenen Oberkörper S von R ist $\bigcap_{i\in I} (M_i)_S = \varnothing$;
(iii) $\bigcap_{i\in I} \widetilde{M_i} = \varnothing$.

Dabei bezeichnet $(M_i)_S$ in (ii) die Grundkörpererweiterung der Menge M_i von R nach S.

Aufgabe 44
Seien nichtnegative ganze Zahlen n, r, d fixiert. Zeige: Es gibt eine natürliche Zahl $N = N(n, r, d)$ derart, daß für jeden reell abgeschlossenen Körper R und beliebige Polynome $f_1, \dots, f_r \in R[x] = R[x_1, \dots, x_n]$ mit $\deg(f_i) \le d$ $(i = 1, \dots, r)$ gilt:

Ist $\{\xi \in R^n \colon f_1(\xi) \ge 0, \dots, f_r(\xi) \ge 0\} = \varnothing$, so gibt es Quadratsummen $s_e \in R[x]$ (für $e \in \{0,1\}^r$) mit
$$-1 = \sum_{e\in\{0,1\}^r} s_e \cdot f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r} \tag{$*$}$$
und mit $\deg(s_e) \le N$ für jeden Multiindex e.

Anleitung: Für $N \ge 1$ betrachte die Menge X_N aller Tupel $(f_1, \dots, f_r) \in R[x]^r$ mit $\deg(f_i) \le d$, für die eine Identität $(*)$ mit $\deg(s_e) \le N$ für alle e existiert. Zeige, daß die Mengen X_N und $\bigcup_{N\ge1} X_N$ semialgebraisch sind, und verwende dann Aufgabe 43.