Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Th. Mayer
WS 2019/20

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 12

Abgabe: Mittwoch 29. Januar 2020 um 13:30 Uhr

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 45
Seien N, $N' \subseteq M \subseteq R^n$ semialgebraische Mengen.

(a) Genau dann ist N dicht in M, wenn die Menge
$$(\widetilde{M})_{\min} := \{\alpha \in \widetilde{M}\colon \text{ aus } \beta \in \widetilde{M} \text{ und } \beta \rightsquigarrow \alpha \text{ folgt } \beta = \alpha\}$$
in $\widetilde{N}$ enthalten ist.

(b) Sind N und N' dicht in M, so ist auch $N \cap N'$ dicht in M.

Aufgabe 46
Sei M eine semialgebraische Teilmenge von $R^{n+1} = R^n \times R$, und sei
$$\pi\colon R^{n+1} \to R^n, \quad \pi(x,t) := x \quad (x \in R^n,\ t \in R)$$
die Projektion. Zeige: Es gibt eine definierbare Abbildung $s\colon \pi(M) \to R$ mit $\big(x, s(x)\big) \in M$ für alle $x \in \pi(M)$.

Aufgabe 47
Gib für die Menge
$$S \ = \ \{(x,y,z) \in R^3\colon y^2 = x^2 z\}$$
eine disjunkte Zerlegung in endlich viele semialgebraische Zellen (d.h. zu R^{n_i} semialgebraisch homöomorphe Teilmengen) an.

Aufgabe 48
Sei M eine semialgebraische Menge

(a) Ist $\alpha \in \widetilde{M}_{\min}$ und $N \subseteq M$ eine semialgebraische Teilmenge mit $\alpha \in \widetilde{N}$, so gibt es eine in M offene semialgebraische Teilmenge U von N mit $\alpha \in \widetilde{U}$.

(b) Seien $M_1, \ldots, M_r \subseteq M$ semialgebraische Teilmengen. Ist $M_1 \cup \cdots \cup M_r$ dicht in M, so ist auch $\operatorname{int}(M_1) \cup \cdots \cup \operatorname{int}(M_r)$ dicht in M. (Hier bezeichnet $\operatorname{int}(M_i)$ das relative Innere von M_i in M.)

(c) Ist $f\colon M \to R^m$ eine definierbare Abbildung, so gibt es eine in M offene und dichte semialgebraische Menge $M' \subseteq M$, so daß $f|_{M'}$ stetig ist.