Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Th. Mayer
WS 2019/20

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 13

Abgabe: Mittwoch 5. Februar 2020 um 13:30 Uhr

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper, sei $C = R(\sqrt{-1})$ in Aufgaben 51 und 52.

Aufgabe 49
Sei $f\colon M \to N$ eine surjektive semialgebraische Abbildung zwischen semialgebraischen Mengen. Sei N semialgebraisch zusammenhängend, und sei $f^{-1}(y)$ semialgebraisch zusammenhängend für jedes $y \in N$.

(a) Bildet f offene semialgebraische Teilmengen von M auf offene Teilmengen von N ab, so ist M semialgebraisch zusammenhängend. Dasselbe gilt, wenn man "offen" durch "abgeschlossen" ersetzt.
(b) Zeige an einem Beispiel, daß (a) ohne weitere Voraussetzung an f im allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 50
Sei M eine semialgebraische Menge. Genau dann ist M semialgebraisch zusammenhängend, wenn $\widetilde{M}$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 51
Sei $d \geq 1$, und sei $[0,1] \to C[x]_{\leq d}$, $t \mapsto f_t$ ein (stetiger) semialgebraischer Weg im R-Vektorraum $C[x]_{\leq d}$ mit $\deg(f_t) = d$ für $0 < t \leq 1$ und mit $f_0 \neq 0$.

(a) Es gibt $0 < c \leq 1$ und semialgebraische Wege $\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta\colon\ ]0, c[\to C$ mit
$$f_t(x) \;=\; \beta(t) \cdot \prod_{i=1}^{d} \bigl(x - \alpha_i(t)\bigr)$$
für $0 < t < c$.
(b) Es gibt $0 \leq m \leq d$, so daß nach eventueller Umnumerierung gilt: Für $1 \leq i \leq m$ existiert $\gamma_i = \lim_{t\to 0} \alpha_i(t)$ in C, für $m+1 \leq i \leq d$ gilt $|\alpha_i(t)| \to \infty$ für $t \to 0$. Weiter ist dann
$$f_0 \;=\; c \cdot (x - \gamma_1) \cdots (x - \gamma_m)$$
mit einer Konstante $0 \neq c \in R$.

Hinweis zu (a): Induktion nach d.

Aufgabe 52
Sei $1 \leq m \leq d$, sei $U \subseteq C$ eine offene semialgebraische Teilmenge. Die Menge aller $0 \neq f \in C[x]$ mit $\deg(f) \leq d$, welche in U mindestens m Nullstellen haben (gezählt mit Vielfachheit), ist offen in $C[x]_{\leq d}$.