Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Th. Mayer
WS 2019/20

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 14

Abgabe: Mittwoch 12. Februar 2020 um 13:30 Uhr

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 53
Sei M eine abgeschlossene und beschränkte semialgebraische Teilmenge von R^n, und sei $f\colon M \to M$ eine definierbare Abbildung mit $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ für alle x, $y \in M$ mit $x \neq y$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Aufgabe 54
Eine semialgebraische Teilmenge $M \subseteq R^n$ ist genau dann abgeschlossen und beschränkt, wenn für jeden abgeschlossenen Punkt α von $\widetilde{M}$ gilt: Die Erweiterung $R \subseteq R(\alpha)$ reell abgeschlossener Körper ist archimedisch. Für $R = \mathbb{R}$ ist auch äquivalent: $(\widetilde{M})^{\max} = M$. (*Hinweis*: Benutze Satz III.5.20 der Vorlesung.)

Aufgabe 55
Seien $N \subseteq M$ semialgebraische Mengen. Ist N dicht in M und $M \neq \varnothing$, so ist $\dim(M \smallsetminus N) < \dim(M)$. (*Hinweis:* Argumentiere mit dem reellen Spektrum.)

Aufgabe 56
Sei R ein reell abgeschlossener Körper. Sei U eine offene semialgebraische Umgebung von 0 in R^n, und sei $f\colon U \to R$ eine Nashfunktion. Die formale Taylorreihe von f in 0 verschwinde identisch, d.h. es sei $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Dann ist $f \equiv 0$ in einer Umgebung von 0. (*Hinweis:* Benutze die Łojasiewicz-Ungleichung.)