Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Th. Mayer
WS 2019/20

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 2

Abgabe: Mittwoch 6. November 2019 um 13:30 Uhr

Aufgabe 5

Sei (K, P) ein angeordneter Körper. Sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}_P$ die Topologie auf K, welche alle offenen Intervalle $]a, b[_P$ $(a,\, b \in K)$ als Basis offener Mengen hat.

(a) Zeige, daß $(K, \mathcal{T})$ ein topologischer Körper ist, d.h. daß Addition und Multiplikation (als Abbildungen $K \times K \to K$) und Inversion (als Abbildung $K^* \to K^*$) stetig sind.

(b) Ist $K \neq \mathbb{R}$, so ist der topologische Raum $(K, \mathcal{T}_P)$ total unzusammenhängend.

(*Hinweis* zu (b): Beachte Aufgaben 1 und 2.)

Aufgabe 6

Sei $P = \{f \in \mathbb{R}(x, y) \colon \exists\, \epsilon > 0 \text{ mit } f(t, e^t) \geq 0 \text{ für } 0 < t < \epsilon\}$. Zeige, daß P ein Positivkegel im Körper $\mathbb{R}(x, y)$ ist.

Aufgabe 7

Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper, sei $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ ein normiertes Polynom in $K[t]$, dessen Nullstellen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ alle in K liegen. Dann gilt:

$$\xi_1, \ldots, \xi_n \;\geq\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^i a_i \;\geq\; 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 8

Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) = 0$, sei $K[[x]]$ der Potenzreihenring über K und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal, sowie $K(\!(x)\!) = \operatorname{Quot} K[[x]]$.

(a) Zu jedem $f \in \mathfrak{m}$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$ in K existiert ein $g \in \mathfrak{m}$ mit $(1 + g)^n = 1 + f$. (*Hinweis:* Binomische Reihe.)

(b) Jedes $f \in K(\!(x)\!)^*$ hat eine eindeutige Darstellung $f = c \cdot x^n \cdot (1 + g)^2$ mit $c \in K^*$, $n \in \mathbb{Z}$ und $g \in \mathfrak{m}$.

(c) Jede Anordnung P von K hat genau zwei Fortsetzungen zu einer Anordnung von $K(\!(x)\!)$.