Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Th. Mayer
WS 2019/20

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 3

Abgabe: Mittwoch 13. November 2019 um 13:30 Uhr

Aufgabe 9

Sei $(K, P) \subseteq (L, Q)$ eine endliche Erweiterung angeordneter Körper (d.h. es gelte $Q \cap K = P$).

(a) Die Erweiterung ist archimedisch, d.h. für alle $b \in L$ existiert ein $a \in K$ mit $b \leq_Q a$.

(b) Im allgemeinen ist K nicht dicht in L bezüglich der Ordnungstopologie von Q. Zeige dies am Beispiel $L = \mathbb{R}(t)$ und $K = \mathbb{R}(t^2)$ mit $0 <_Q nt <_Q 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis zu (b): Es gibt kein $f \in K$ mit $t < f < 2t$.

Aufgabe 10

Sei K ein Körper und $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n \in K[t]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln von f in $\overline{K}$, und sei $w_k = w_k(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k$ die k-te Newtonsche Summe ($k \geq 0$).

(a) Zeige die *Newtonsche Identität*

$$w_k + w_{k-1}\, a_1 + w_{k-2}\, a_2 + \cdots + w_1\, a_{k-1} + k\, a_k \;=\; 0$$

für alle $k \geq 0$. (Hierbei wird $a_k := 0$ für $k > n$ gesetzt.)

(b) Es gilt

$$\frac{f'}{f} \;=\; \frac{w_0}{t} + \frac{w_1}{t^2} + \frac{w_2}{t^3} + \cdots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{t^{k+1}}$$

(Gleichheit von formalen Potenzreihen in $\frac{1}{t}$). Die $w_k(f)$ sind also die Taylorkoeffizienten der Entwicklung von $\frac{f'}{f}$ um ∞.

Aufgabe 11

Betrachte das Polynom $f = t^5 + at^2 + b$ mit $a,\, b \in \mathbb{R}$. Die Diskriminante von f ist $D = b\,(3125\,b^3 + 108\,a^5)$ (das braucht nicht bewiesen zu werden). Es sei $D \neq 0$. Bestimme die Anzahl der reellen Nullstellen von f mit Hilfe der Sturmschen Kette. (Die Antwort hängt nur von D ab.)

Aufgabe 12

Löse Aufgabe 11 mit der Methode von Hermite statt mit Sturmschen Ketten.