Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Th. Mayer
WS 2019/20

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 4

Abgabe: Mittwoch 20. November 2019 um 13:30 Uhr

Sei jeweils R ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 13

Sei $\xi = (U, O)$ ein Dedekindschnitt von R. Wir setzen

$$P_\xi := \Big\{ f \in R(t) \colon \exists\, a \in U \cup \{-\infty\}\ \exists\, b \in O \cup \{\infty\}\ \forall\, x \in \,]a, b[\ \ f(x) \geq 0 \Big\}.$$

(Hierbei bedeutet $f(x) \geq 0$ insbesondere, daß f in x keinen Pol hat.)

(a) P_ξ ist eine Anordnung von $R(t)$.

(b) Jede Anordnung von $R(t)$ ist von der Form P_ξ für genau einen Dedekindschnitt ξ von R.

(c) Genau dann ist die Erweiterung $(R, R_+) \subseteq \big(R(t), P_\xi\big)$ archimedisch (siehe Aufgabe 9(a)), wenn der Dedekindschnitt ξ frei ist.

Aufgabe 14

Betrachte das Polynom

$$f = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$$

in $\mathbb{R}[x, y]$.

(a) $f(a, b) \geq 0$ für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(b) f ist nicht Summe von Quadraten in $\mathbb{R}[x, y]$.

Hinweise: Für (a) wende die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auf drei geeignete Zahlen an. In (b) mache einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten und führe ihn zu einem Widerspruch.

Aufgabe 15

Finde eine Darstellung des Polynoms aus Aufgabe 14 als Summe von Quadraten rationaler Funktionen in $\mathbb{R}(x, y)$. (*Hinweis:* Erweitere mit $1 + x^2$.)

Aufgabe 16

Sei $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine R-Formel, und sei $M = S_R(\varphi)$ die Erfüllungsmenge von φ in R^n. Gib eine explizite Formel an, deren Erfüllungsmenge der Abschluß $\overline{M}$ (bzw. das Innere $\mathrm{int}(M)$, bzw. der Rand ∂M, bzw. die konvexe Hülle $\mathrm{conv}(M)$) von M ist.