Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Th. Mayer
WS 2019/20

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 5

Abgabe: Mittwoch 27. November 2019 um 13:30 Uhr

Aufgabe 17

Sei R ein reell abgeschlossener Körper, seien $f_1, \dots, f_m \in R[x_1, \dots, x_n]$, und sei $f\colon R^n \to R^m$ die Abbildung $\xi \mapsto (f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))$. Zeige, daß für jede abgeschlossene beschränkte semialgebraische Menge $M \subseteq R^n$ die Bildmenge $f(M)$ abgeschlossen und beschränkt in R^m ist.

Aufgabe 18

Sei k ein Körper, welcher nicht algebraisch abgeschlossen ist. Für jedes $n \geq 1$ gibt es ein nichtkonstantes homogenes Polynom $f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ mit $f_n(a) \neq 0$ für alle $0 \neq a \in k^n$. (*Hinweis*: Induktion nach n.)

Aufgabe 19

Sei $K = \mathbb{R}(t)$, versehen mit der Anordnung $\leq$ mit $0 < nt < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sei R der reelle Abschluß von $(K, \leq)$. Zeige für das Polynom $f = x^4 - 4tx^2 + 3t^2 \in K[x]$:

(a) $f(a) \geq 0$ für alle $a \in K$;
(b) es gibt $b \in R$ mit $f(b) < 0$.

Aufgabe 20

Sei K ein Körper ($\mathrm{char}(K) \neq 2$), und sei $f \in K[t]$ ein normiertes irreduzibles Polynom. Genau dann ist der Körper $L = K[t]/(f)$ reell, wenn f keine Quadratsumme in $K(t)$ ist.

Anmerkung: Es läßt sich zeigen, daß jedes Polynom in $K(t)$, welches eine Quadratsumme von rationalen Funktionen ist, schon eine Quadratsumme von Polynomen ist.