Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Th. Mayer
WS 2019/20

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 6

Abgabe: Mittwoch 4. Dezember 2019 um 13:30 Uhr

Sei jeweils R ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 21
Bestimme bis auf orthogonale Äquivalenz alle Darstellungen des Polynoms $x^4 + 1$ als Summe von Quadraten in $R[x]$.

Aufgabe 22
Sei $K \subseteq R^n$ eine unbeschränkte abgeschlossene semialgebraische Menge, sternförmig bezüglich einem Punkt $x_0 \in K$ (d.h., mit jedem $x \in K$ ist auch die Strecke $[x_0, x]$ in K enthalten). Dann enthält K eine von x_0 ausgehende Halbgerade.

Aufgabe 23
Für jedes Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ ist die Menge G_f^+ aller psd Grammatrizen von f eine abgeschlossene und beschränkte konvexe Menge. (*Hinweis:* Aufgabe 22.)

Aufgabe 24
Seien n, $d \geq 1$ und $\mathtt{x} = (x_1, \dots, x_n)$, sei $\Sigma_{n,2d} \subseteq R[\mathtt{x}]_{2d}$ der Kegel der Quadratsummen von Formen vom Grad d. Zeige: Das Innere von $\Sigma_{n,2d}$ in $R[\mathtt{x}]_{2d}$ ist nicht leer.

Aufgabe A*
Betrachte für $n \geq 1$ das Polynom

$$f_n \ = \ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$$

in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Zeige: f_n ist psd $\Leftrightarrow$ $n \in \{1, 2, 3, 5\}$.