Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Th. Mayer
WS 2019/20

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 8

Abgabe: Mittwoch 18. Dezember 2019 um 13:30 Uhr

Aufgabe 29

Sei A ein Ring, sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge und $I \subseteq A$ ein Ideal, und sei $\varphi\colon A \to A_S$ bzw. $\pi\colon A \to A/I$ der kanonische Homomorphismus.

(a) φ induziert einen Homöomorphismus φ^* von $\mathrm{Sper}(A_S)$ auf den Teilraum $\{\alpha\colon S \cap \mathrm{supp}(\alpha) = \varnothing\}$ von $\mathrm{Sper}(A)$.

(b) π induziert einen Homöomorphismus π^* von $\mathrm{Sper}(A/I)$ auf den Teilraum $\{\alpha\colon I \subseteq \mathrm{supp}(\alpha)\}$ von $\mathrm{Sper}(A)$.

Aufgabe 30

Sei R ein reell abgeschlossener Körper und $R[x]$ der Polynomring in einer Variable. Bestimme die Elemente von $\mathrm{Sper}\,R[x]$ und sämtliche Spezialisierungen zwischen ihnen. Welches sind die abgeschlossenen Punkte von $\mathrm{Sper}\,R[x]$? (*Hinweis*: Aufgabe 13)

Aufgabe 31

Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, und sei P ein Positivkegel von A. Genau dann gibt es einen Positivkegel Q von B mit $\varphi^{-1}(Q) = P$, wenn für alle $r \in \mathbb{N}$, alle $a, a_1, \dots, a_r \in P$ mit $a \notin -P$ und alle $b_1, \dots, b_r \in B$ gilt:

$$\varphi(a) + \sum_{i=1}^{r} \varphi(a_i) b_i^2 \neq 0$$

in B. (*Hinweis*: Allgemeiner reeller Stellensatz.)

Aufgabe 32

Sei k ein Körper.

(a) Sei $k \subseteq L$ eine Körpererweiterung, sei P eine Anordnung von L und Q eine Anordnung von $k(t)$ mit $k \cap P = k \cap Q$. Dann gibt es eine Anordnung Q' von $L(t)$ mit $L \cap Q' = P$ und $k(t) \cap Q' = Q$.

(b) Seien R_1, R_2 zwei reell abgeschlossene Oberkörper von k mit $k \cap (R_1)_+ = k \cap (R_2)_+$. Dann gibt es einen reell abgeschlossenen Körper S zusammen mit k-Einbettungen $R_i \to S$ für $i = 1, 2$.

Hinweis zu (a): Betrachte zunächst den Fall $L =$ reeller Abschluß von $(K, K \cap P)$.