Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Th. Mayer
WS 2019/20

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 9

Abgabe: Mittwoch 8. Januar 2020 um 13:30 Uhr

In den Aufgaben 33 und 36 sei jeweils R ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 33
Sei V eine affine R-Varietät. Eine endliche Teilmenge $K \subseteq \operatorname{Sper} R[V]$ ist konstruierbar in $\operatorname{Sper} R[V]$ genau dann, wenn $K \subseteq V(R)$ ist.

Aufgabe 34
Sei A ein noetherscher Ring, sei $\varphi\colon A \to B$ eine endlich erzeugte A-Algebra. Für jede konstruierbare Teilmenge Y von $\operatorname{Sper}(B)$ ist die Menge $\varphi^*(Y)$ konstruierbar in $\operatorname{Sper}(A)$.

Aufgabe 35
Sei A ein Ring, sei X eine prokonstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Sper}(A)$, und sei

$$\operatorname{Gen}(X) := \left\{\beta \in \operatorname{Sper}(A)\colon X \cap \overline{\{\beta\}} \neq \varnothing\right\}$$

die Menge aller Generalisierungen von Elementen aus X.

(a) Jede Umgebung von X in $\operatorname{Sper}(A)$ enthält eine konstruierbare Umgebung von X.
(b) Die Menge $\operatorname{Gen}(X)$ ist prokonstruierbar in $\operatorname{Sper}(A)$.
(c) Ist K eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Sper}(A)$ mit $\operatorname{Gen}(X) \subseteq K$, so enthält K eine Umgebung von X in $\operatorname{Sper}(A)$.

Aufgabe 36
Sei V eine affine R-Varietät, und sei $X = \operatorname{Sper} R[V]$. Genau dann ist die Teilmenge $X^{\max}$ von X (aller abgeschlossenen Punkte von X) prokonstruierbar, wenn $V(R)$ eine endliche Menge ist.

Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!