Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
SS 2019

Übungen zur Kommutativen Algebra

Blatt 1

Abgabe: Mittwoch, 24. April 2019 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Es sind äquivalent:

(i) f hat eine Linksinverse (ein $h \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$ mit $h \circ f = \mathrm{id}_{M'}$);
(ii) g hat eine Rechtsinverse (ein $h \in \mathrm{Hom}_A(M'', M)$ mit $g \circ h = \mathrm{id}_{M''}$);
(iii) $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$ ist ein direkter Summand von M;
(iv) für jeden A-Modul T ist $f^*\colon \mathrm{Hom}_A(M, T) \to \mathrm{Hom}_A(M', T)$, $h \mapsto h \circ f$ surjektiv.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so sagt man, daß die Sequenz *spaltet*.

Aufgabe 2

Sei A ein Ring, sei $M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln, und sei N ein weiterer A-Modul. Dann ist auch die Sequenz

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f' \otimes \mathrm{id}} M \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

exakt ($\otimes := \otimes_A$). Ist der A-Modul N frei, so ist für jede exakte Sequenz von A-Moduln auch die mit N tensorierte Sequenz exakt.

Anleitung: Um die nicht offensichtliche Inklusion zu zeigen, konstruiere man eine geeignete Abbildung von $M'' \otimes N$ nach $\mathrm{coker}(f' \otimes \mathrm{id}) = (M \otimes N)/\mathrm{im}(f' \otimes \mathrm{id})$.

Aufgabe 3

Sei A ein Ring, und seien

$$M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0, \quad N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$$

zwei exakte Sequenzen von A-Moduln. Dann ist auch die Sequenz

$$(M' \otimes N) \oplus (M \otimes N') \xrightarrow{\phi} M \otimes N \xrightarrow{f \otimes g} M'' \otimes N'' \longrightarrow 0$$

exakt, wobei ϕ die A-lineare Abbildung mit

$$\phi(x' \otimes y,\ x \otimes y') \ = \ f'(x') \otimes y + x \otimes g'(y')$$

ist ($\otimes := \otimes_A$).

Aufgabe 4

Seien A, B, C Ringe und $\beta\colon A \to B$, $\gamma\colon A \to C$ Ringhomomorphismen. Zeige:

(a) $B \otimes_A C$ hat eine Ringstruktur mit $(b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$ für alle b, $b' \in B$ und c, $c' \in C$.

(b) Die Abbildungen $\phi\colon B \to B \otimes_A C$, $b \mapsto b \otimes 1$ und $\psi\colon C \to B \otimes_A C$, $c \mapsto 1 \otimes c$ sind Ringhomomorphismen, und es gilt $\phi \circ \beta = \psi \circ \gamma$.

(c) Der Ring $B \otimes_A C$, zusammen mit den Homomorphismen ϕ und ψ, hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu je zwei Ringhomomorphismen $f\colon B \to D$ und $g\colon C \to D$ mit $f \circ \beta = g \circ \gamma$ gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\Phi\colon B \otimes_A C \to D$ mit $f = \Phi \circ \phi$ und $g = \Phi \circ \psi$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\psi"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & B \otimes_A C \arrow[dr, dotted, "\Phi"'] & \\
 & & D
\end{tikzcd}$$

Man schreibt $f \otimes g$ für Φ.

(*Hinweis:* B bzw. C ist ein A-Modul via β bzw. γ, so erklärt sich das Tensorprodukt $B \otimes_A C$.)